

К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

**Решение параболических уравнений
с помощью моделирования траекторий
специального ветвящегося процесса¹**

Рассматривается задача решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с помощью моделирования траекторий специального ветвящегося процесса. Каждая из ветвей, рассматриваемая отдельно, представляет собой часть траектории случайного процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением, составленным по коэффициентам параболического уравнения, один из коэффициентов параболического уравнения влияет на распределение моментов времени обрывов и появления новых ветвей. Разработан алгоритм приближенного решения на основе стохастического метода Эйлера [1] и метода «максимального сечения» [2].

Пусть задано уравнение в частных производных

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} = A\phi(t, x) + \lambda(t, x)\phi(t, x), \quad (t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$A\phi(t, x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\phi(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\phi(t, x)],$$

с начальным условием $\phi(t_0, x) = \phi_0(x)$ и краевым условием $\phi(t, \infty) = 0$, где $f_i(t, x)$ и $g_{ij}(t, x)$ – известные функции, $g_{ij}(t, x) = g_{ji}(t, x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Вектор-функцию размеров $n \times 1$, образованную элементами $f_i(t, x)$, будем обозначать через $f(t, x)$, а матричную функцию размеров $n \times n$, образованную элементами $g_{ij}(t, x)$, будем обозначать через $g(t, x)$, предполагая, что $g(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^T(t, x)$, $\sigma(t, x)$ – матричная функция размеров $n \times s$ с элементами $\sigma_{il}(t, x)$. Решение этого уравнения можно понимать как в классическом, так и в обобщенном смысле в зависимости от условий, накладываемых на функции $f_i(t, x)$, $\sigma_{il}(t, x)$, $\lambda(t, x)$ и $\phi_0(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, s$.

В случае, когда $\lambda(t, x) = 0$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_0(x) dx = 1$, уравнение (1) описывает закон

изменения плотности вероятности $\phi(t, x)$ случайного вектора $X \in \mathbb{R}^n$ – сечения случайного процесса $X(t)$, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению Ито [1]

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (2)$$

¹ Рыбаков К.А. Решение параболических уравнений с помощью моделирования траекторий специального ветвящегося процесса // Вопросы создания аэрокосмических и ракетных летательных аппаратов: Сб. науч. тр. – М.: Изд-во Ваш полиграфический партнер, 2013. – С. 238–244.

где $W(t)$ – s -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от случайной величины X_0 , определяемой плотностью вероятности $\phi_0(x)$. Функция $\phi(t, x)$ может быть найдена приближенно по результатам моделирования траекторий случайного процесса $X(t)$ с использованием методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений [1].

Рассмотрим случай $\lambda(t, x) \neq 0$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_0(x) dx = 1$. Пусть

$$\lambda(t, x) = -\lambda^-(t, x) + \lambda^+(t, x), \quad (3)$$

где

$$\lambda^-(t, x) = \begin{cases} -\lambda(t, x), & \lambda(t, x) < 0, \\ 0, & \lambda(t, x) \geq 0, \end{cases} \quad \lambda^+(t, x) = \begin{cases} \lambda(t, x), & \lambda(t, x) > 0, \\ 0, & \lambda(t, x) \leq 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} = A\phi(t, x) - \lambda^-(t, x)\phi(t, x) + \lambda^+(t, x)\phi(t, x) \quad (4)$$

описывает закон изменения ненормированной плотности вероятности $\phi(t, x)$ случайного вектора X – сечения случайного процесса $X(t)$, допускающего обрывы и ветвления траекторий [3] с интенсивностями $\lambda^-(t) = \lambda^-(t, X(t))$ и $\lambda^+(t) = \lambda^+(t, X(t))$ соответственно (обрывы и ветвления траекторий образуют неоднородные пуассоновские потоки событий, при ветвлении в фиксированный момент времени может появиться только одна новая ветвь, при обрыве прекращается моделирование только одной ветви). Поведение траекторий процесса $X(t)$ между моментами ветвлений определяется уравнением (2). Для удобства моделирования каждая из новых ветвей рассматривается как самостоятельная траектория.

Для приближенного решения уравнения (1) предлагается использовать метод статистических испытаний: моделировать траектории случайного процесса $X(t)$ с учетом обрывов и ветвлений, применяя различные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков. Функция $\phi(t, x)$ может быть приближена, например, гистограммой [4].

Далее приведен алгоритм моделирования траекторий случайного процесса $X(t)$ с обрывами и ветвлениями на основе стохастического метода Эйлера и метода «максимального сечения».

Шаг 1. Задать M – число моделируемых траекторий; h – шаг численного интегрирования; величину λ^* ($|\lambda(t, x)| \leq \lambda^*$ [2]). Получить реализации начальных состояний X_0^i для траекторий случайного процесса $X(t)$ согласно заданной плотности вероятности $\phi_0(x)$ и моменты времени ξ^i , через которые могут произойти обрывы или ветвления траекторий:

$$\xi^i = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Здесь и далее β – различные реализации (для всех i) случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале (0,1).

Положить $k = 0$, $t_*^i = t_0$, $F^i = 1$ (в случае обрыва траектории с номером i при последующем моделировании $F^i = 0$), $i = 1, 2, \dots, M$.

Шаг 2. Положить

$$M_k = \sum_{i=1}^M F^i$$

и оценить [4] плотность вероятности $p(t_k, x)$ по реализациям

$$X_k = \{X_k^i\}_{i=1, \dots, M; F^i=1},$$

тогда

$$\phi(t_k, x) = \frac{M_k}{M} p(t_k, x).$$

Проверить условия:

а) если $0 < T - t_k < h$, то скорректировать шаг численного интегрирования:

$$h = T - t_k;$$

б) если $T - t_k = 0$, то завершить процесс.

Положить $i = 1$, $j = 0$ (j – количество новых ветвей на шаге k).

Шаг 3. Проверить условие $F^i = 0$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 8, иначе: при $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$ перейти к шагу 4, а при $t_*^i + \xi^i < t_k + h$ – к шагу 5.

Шаг 4. Получить реализацию вектора X в следующем узле сетки $\{t_k = t_0 + kh\}$ (см. рис.: а → б):

$$X_{k+1}^i = X_k^i + hf(t_k, X_k^i) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k^i)\Delta W.$$

В этом соотношении и далее ΔW – различные для всех k и i (а также для промежуточных расчетов) реализации случайных векторов размеров $s \times 1$, координаты которых имеют стандартное нормальное распределение.

Перейти к шагу 8.

Шаг 5. Получить реализацию вектора X в дополнительном узле сетки (см. рис.: а → в):

$$\tilde{X} = X_k^i + h_{\triangleleft} f(t_k, X_k^i) + \sqrt{h_{\triangleleft}} \sigma(t_k, X_k^i) \Delta W, \quad h_{\triangleleft} = t_*^i + \xi^i - t_k.$$

Получить реализацию α случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале (0,1). Проверить условие

$$\alpha \leq \frac{|\lambda(t_*^i + \xi^i)|}{\lambda^*},$$

где $\lambda(t_*^i + \xi^i) = \lambda(t_*^i + \xi^i, \tilde{X})$, и если оно выполнено, то перейти к шагу 6, иначе – к шагу 7 (см. рис.: в → г).

Шаг 6. Проверить условия:

а) если $\lambda(t_*^i + \xi^i) < 0$ ($\lambda^-(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}) > 0$, обрыв траектории, см. рис.: в → д), то положить $F^i = 0$ (траектория далее не моделируется) и перейти к шагу 8;

б) если $\lambda(t_*^i + \xi^i) > 0$ ($\lambda^+(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}) > 0$), ветвление траектории, см. рис.: $v \rightarrow e$), то положить $j = j + 1$ и получить реализацию вектора X в следующем узле сетки $\{t_k\}$ для новой траектории (точнее, «новой ветви» траектории с номером i , которая далее рассматривается как другая траектория с номером $M + j$):

$$X_{k+1}^{M+j} = \tilde{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) + \sqrt{h_{\triangleright}} \sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) \Delta W, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft}.$$

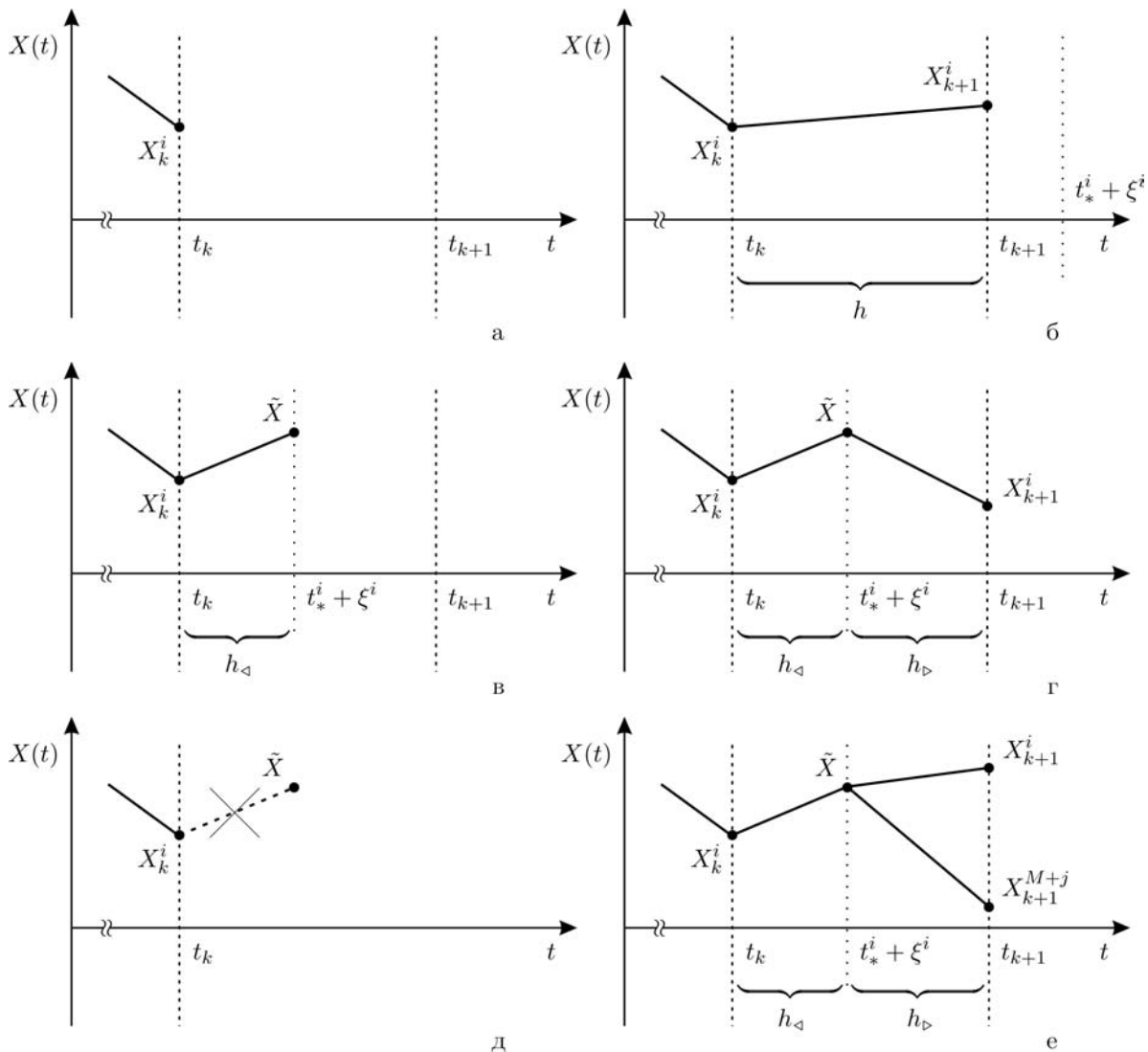


Рис. Примеры моделирования траекторий скалярного ($n = 1$) случайного процесса $X(t)$ с обрывами и ветвлениями.

Положить $F^{M+j} = 1$, $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$ и получить реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или новое ветвление:

$$\xi^{M+j} = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*},$$

моделирование ξ^{M+j} проводится до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$t_*^{M+j} + \xi^{M+j} \geq t_k + h.$$

Шаг 7. Получить реализацию вектора X в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1}^i = \tilde{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) + \sqrt{h_{\triangleright}} \sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) \Delta W, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft}.$$

Положить $t_*^i = t_*^i + \xi^i$ и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или ветвление рассматриваемой траектории:

$$\xi^i = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*},$$

моделирование ξ^i проводится до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$t_*^i + \xi^i \geq t_k + h.$$

Шаг 8. Проверить условия:

а) если $i = M$, то положить $M = M + j$, $t_{k+1} = t_k + h$, $k = k + 1$ и перейти к шагу 2;

б) если $i < M$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 3.

Замечания.

1. При условии $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_0(x) dx = C \neq 1$ предварительно следует выполнить замену: $\psi(t, x) = \frac{\phi(t, x)}{C}$, тогда для новой функции $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(t_0, x) dx = 1$.

2. Предложенный подход может быть применен при $(t, x) \in [t_0, T] \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и заданных краевых условиях $\phi(t, x)|_{\partial\Omega} = 0$ или $\pi(t, x)|_{\partial\Omega} = 0$, где $\pi(t, x)$ – вектор-функция размеров $n \times 1$, образованная элементами

$$\pi_i(t, x) = f_i(t, x)\phi(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{ij}(t, x)\phi(t, x)], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При такой постановке задачи помимо обрывов и ветвлений траекторий случайного процесса $X(t)$ необходимо рассматривать поглощение или отражение на границе $\partial\Omega$ [5].

3. Для повышения точности расчетов могут применяться методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений, имеющие больший порядок точности, нежели стохастический метод Эйлера. Однако точность определяется не только выбранным методом численного решения стохастических дифференциальных уравнений, но и методом моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

Преимущество разработанного алгоритма в первую очередь состоит в простоте реализации: можно применять известные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков, при этом вычислительная сложность алгоритма зависит от вычислительной сложности применяемых численных методов и генераторов псевдослучайных чисел. Алгоритм может применяться и для случая разрывных функций $f_i(t, x)$, $\sigma_{il}(t, x)$, $\lambda(t, x)$ и $\phi_0(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, s$.

Библиографический список

1. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. – М.: Вузовская книга, 2008.
2. Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. – 2009. Т. 428. № 2. – С. 163–165.
3. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. – М.: Физматлит, 1993.
4. Рыбаков К.А. Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2012. № 3. – С. 91–110. – <http://www.math.spbu.ru/diffjournal> (30.09.12).
5. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977.