УДК 517.977.5

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ДИФФУЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА

К.А. Рыбаков

Московский авиационный институт

Россия, 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: rkoffice@mail.ru

Ключевые слова: диффузионно-скачкообразный процесс, импульсные воздействия, неполная информация, оптимальное управление, принцип расширения, пуассоновский процесс, стохастическая система

Аннотация: Рассматривается задача оптимального управления нелинейными стохастическими системами, описываемыми стохастическими дифференциальными уравнениями Ито со скачкообразной компонентой — общим пуассоновским процессом. При управлении может использоваться информация только о части координат вектора состояния. Достаточные условия оптимальности получены на основе принципа расширения.

1. Введение

В работе рассматриваются системы управления, математические модели которых задаются нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями с диффузионной и скачкообразной компонентами, позволяющими учитывать непрерывные и импульсные воздействия, имеющие случайный характер. Ограничимся случаем, когда скачкообразная компонента задается общим пуассоновским процессом [1]. Именно такие постановки задач наиболее часто встречаются в приложениях (например, при анализе воздействия импульсов на электрические цепи [2], при описании изменения стоимости ценных бумаг [3–5] и др.).

Задача состоит в нахождении управления и соответствующей ему плотности вероятности вектора состояния динамической системы, минимизирующих заданный функционал качества. Предполагается, что при управлении используется информация о текущем времени и величине части координат вектора состояния, т.е. рассматривается управление по неполному вектору состояния при его точном измерении [6–9]. Таким образом, программное управление и управление с полной обратной связью являются частными случаями, когда число измеряемых координат нулевое или совпадает с размерностью вектора состояния соответственно. Отметим, что, как правило, рассматриваются задачи оптимального программного управления или управления с полной обратной связью [4,5,10] (в [10] дополнительно рассматривается случай неточных измерений).

В основе полученных достаточных условий лежит принцип расширения [11, 12], позволяющий перейти от оптимизации в функциональном пространстве к конечномерной оптимизации. С их помощью найдены соотношения для определения оптимального управления в задаче управления системами диффузионно-скачкообразного типа, рассмотрен частный случай нахождения оптимального в среднем управления, т.е. при задании функционала качества в виде математического ожидания.

2. Постановка задачи

Пусть модель стохастической системы управления описывается уравнением Ито со скачкообразной компонентой [1, 2, 13]:

$$dX(t) = f(t, X(t), \mathbf{u}(t))dt + \sigma(t, X(t), \mathbf{u}(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

в котором $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $\mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^q$ — управление; $t \in T = [t_0, t_1]$, T — промежуток времени функционирования системы, моменты времени t_0 и t_1 заданы; $f(t, x, u)\colon T \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функция $n \times 1$, $\sigma(t, x, u)\colon T \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times s}$ — матричная функция $n \times s$; $W(t)$ — s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от X_0; $Q(t)$ — случайный процесс с кусочно-постоянными траекториями (процесс непрерывен справа и имеет пределы слева [14]), заданный в виде

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{P(t)} Y(\tau_i),$$

где $P(t)$ — пуассоновский процесс, $Y(\tau_i)$ — независимые случайные величины из $\mathbb{R}^n$, распределение которых задано плотностью вероятности $q(t, y)\colon T \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ или в общем случае условной плотностью вероятности $q(t, x + y \,|\, x)\colon T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to$ $\to [0, +\infty)$. Таким образом, вектор состояния X получает случайные приращения в моменты времени τ_1, τ_2, ..., образующие пуассоновский поток событий:

$$X(\tau_i) = X(\tau_i - 0) + Y(\tau_i).$$

Промежутки времени $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ $(\tau_0 = t_0)$, описываются обобщенным показательным законом распределения с параметром $\lambda(t) = \lambda(t, X(t))$, т.е.

$$\Pr\bigl(P(t + \Delta t) - P(t) = 1 \mid X(t) = x\bigr) = \lambda(t, x)\Delta t + o(\Delta t).$$

Следовательно, случайный процесс $Q(t)$ определяется интенсивностью $\lambda(t, x)\colon$ $T \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ и плотностью вероятности приращений вектора состояния $q(t, y)$ или в общем случае условной плотностью вероятности $q(t, x + y \,|\, x)$.

При управлении используется информация о времени и о величине m первых координат вектора состояния: $0 \leqslant m \leqslant n$, т.е. $X = [X_{(1)}\ X_{(2)}]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{u}(t) = u(t, X_{(1)}(t))$, где $X_{(1)} = [X_1\ X_2\ \ldots\ X_m]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $X_{(2)} = [X_{m+1}\ \ldots\ X_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-m}$. Для любой задачи управления по неполному вектору состояния можно упорядочить координаты именно таким образом.

Предполагается, что функции $f(t, x, u)$, $\sigma(t, x, u)$ и $u(t, x_{(1)})$, где $x_{(1)} \in \mathbb{R}^m$, обладают следующими свойствами [4]: функции $f_{i,u}(t, x) = f_i(t, x, u(t, x_{(1)}))$ и $g_{ij,u}(t, x) =$ $= g_{ij}(t, x, u(t, x_{(1)}))$ кусочно-непрерывны по t для всех $x \in \mathbb{R}^n$; при фиксированном

$t \in T$ $f_{i,u}(t,x)$ имеют непрерывные и ограниченные производные первого порядка, а $g_{ij,u}(t,x)$ имеют непрерывные и ограниченные производные второго порядка, где $g_{ij}(t,x,u)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, — элементы матричной функции $g(t,x,u) = \sigma(t,x,u) \times \times \sigma^{\mathrm{T}}(t,x,u)$. Кроме того, $\lambda(t,x)$ и $\int_{\mathbb{R}^n} yq(t,x+y\,|\,x)dy$ кусочно-непрерывные по t функции, удовлетворяющие условию Липшица по x. Далее множество таких функций $u(t,x_{(1)})$ будем обозначать через $\mathfrak{U}_m$. Начальное состояние X_0 имеет конечный момент второго порядка.

Эти условия (иногда к ним добавляется дополнительное условие на матрицу диффузии $g(t,x,u)$, требуемое для разрешимости приведенных ниже параболических уравнений) обеспечивают существование и единственность сильного решения уравнения (1), однако они вносят слишком много ограничений при решении прикладных задач. Вопросы, связанные с ослаблением условий, рассмотрены в [15]. В частности, можно рассматривать уравнения с разрывным (по переменной x) коэффициентом сноса $f(t,x,u)$ или вырожденной матрицей диффузии $g(t,x,u)$, достаточно часто встречающиеся в задачах управления. В ряде случаев требуется ослабить условия на интенсивность $\lambda(t,x)$. Отметим, что в [15] рассмотрены стохастические дифференциальные уравнения без скачкообразной компоненты, тем не менее, эти результаты могут быть обобщены. Кроме того, можно рассматривать задачу оптимального управления слабым решением стохастического дифференциального уравнения.

Определения сильного и слабого решений стохастических дифференциальных уравнений и возможные варианты условий, которым должны удовлетворять функции, задающие модель стохастической системы, подробно изложены в [14].

Случайный процесс $X(t)$ удобно задавать плотностью вероятности $\varphi(t,x)$, удовлетворяющей уравнению Колмогорова–Феллера [2, 10]:

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}_{u(t,x_{(1)})}\varphi(t,x), \quad \varphi(t_0,x) = \varphi_0(x), \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_u\varphi(t,x) = &-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i(t,x,u)\varphi(t,x)\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[g_{ij}(t,x,u)\varphi(t,x)\right] - \\ &- \lambda(t,x)\varphi(t,x) + \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(t,z)q(t,x\,|\,z)\varphi(t,z)dz,\end{aligned}$$

а $\varphi_0(x)$ — плотность вероятности начального состояния X_0.

Решение уравнения (2) будем понимать в обобщенном смысле из-за возможной негладкости коэффициентов, а именно $\varphi(t,x) \in W_2^{1,1}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varphi_0(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$, где $W_2^{1,1}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ — соответствующие пространства Соболева. С учетом этого введем множество $\mathfrak{F}$ допустимых плотностей вероятности вектора состояния:

$$\mathfrak{F} = \left\{\varphi(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^n), \quad \varphi(x) \geqslant 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1\right\}.$$

Далее будем придерживаться обозначений и формулировок, используемых в [6, 7, 16] для получения достаточных условий оптимальности в задаче управления системами диффузионного типа (без скачкообразной компоненты).

Пусть $\mathfrak{D}_m$ — множество пар $d_m = (\varphi(t,x), u(t,x_{(1)}))$ таких, что $\varphi(t,x)$ и $u(t,x_{(1)}) \in \in \mathfrak{U}_m$ удовлетворяют уравнению (2), где $\varphi(t,x) \in \mathfrak{F}$ для любого фиксированного $t \in T$. Введем на $\mathfrak{D}_m$ функционал качества:

$$J(\varphi_0(x), d_m) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(t, \varphi(t,x), u(t,x_{(1)}))dtdx + \theta(\varphi(t_1,x)), \tag{3}$$

где $\omega(t,\varphi(t,x),u)\colon T \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, а $\theta(\varphi(x))\colon \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ — ограниченный функционал. Функция $\omega(t,\varphi(t,x),u)$ и функционал $\theta(\varphi(x))$ заданы. На функцию $\omega(t,\varphi(t,x),u)$ можно накладывать дополнительные условия, обеспечивающие конечность величины $J(\varphi_0(x), d_m)$.

Задача 1. *Требуется найти такой элемент* $d_m^* = (\varphi^*(t,x), u^*(t,x_{(1)})) \in \mathfrak{D}_m$, *что*

$$J(\varphi_0(x), d_m^*) = \min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J(\varphi_0(x), d_m). \tag{4}$$

Задача 2. *Требуется найти такую синтезирующую функцию* $u^*(t,x_{(1)},\varphi(x))\colon T \times \mathbb{R}^m \times \mathfrak{F} \to U$, *т.е.* $d_m^* = (\varphi^*(t,x), u^*(t,x_{(1)},\varphi^*(t,x))) \in \mathfrak{D}_m$, *что*

$$J(\varphi_0(x), d_m^*) = \min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J(\varphi_0(x), d_m) \tag{5}$$

для любых допустимых $\varphi_0(x)$.

Если рассматривать задачу управления решением уравнения (2), то оптимальная синтезирующая функция $u^*(t,x_{(1)},\varphi(x))$ — это управление с обратной связью с учетом того, что состоянием системы, которое содержит всю информацию в текущий момент времени t, является функция $\varphi(x) = \varphi(t,x)$. При заданной начальной плотности вероятности $\varphi_0(x)$ она порождает оптимальное управление решением уравнения (1) при неполной информации:

$$\begin{array}{ccccc} \varphi(t,x) & \longrightarrow & X_{(1)}(t) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ u^*(t,x_{(1)},\varphi(x)) & \longrightarrow & u^*(t,x_{(1)}) & \longrightarrow & \mathbf{u}^*(t). \end{array}$$

Предполагается, что минимум в (4) и (5) существует, иначе задачи 1 и 2 можно сформулировать в терминах минимизирующих последовательностей [8, 11, 12].

3. Достаточные условия оптимальности

Рассмотрим множество $\mathfrak{S}$ функций $S(t,\varphi(x))\colon T \times \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$, непрерывных и кусочно-дифференцируемых по переменной t на множестве T и имеющих непрерывные вариационные производные $\delta S(t,\varphi(\varkappa))/\delta\varphi(x)$ [17]. При фиксированном $t \in T$ $S(t,\varphi(x))$ — функционал, при фиксированном $\varphi(x) \in \mathfrak{F}$ — функция времени.

Определим на $\mathfrak{S}$ следующие конструкции:

$$\begin{aligned} R(t,\varphi(x),u) &= \frac{\partial S(t,\varphi(x))}{\partial t} + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\delta S(t,\varphi(\varkappa))}{\delta\varphi(x)} \mathcal{A}_u \varphi(x) - \omega(t,\varphi(x),u) \right] dx, \end{aligned} \tag{6}$$

$$G(t_1, \varphi(x)) = S(t_1, \varphi(x)) + \theta(\varphi(x)). \tag{7}$$

Предположим, что при фиксированном m: $0 \leqslant m \leqslant n$, выполняются равенства

$$\begin{gathered} \max_{\varphi(x)\in\mathfrak{F}} \left\{ \frac{\partial S(t, \varphi(x))}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^m} \max_{u\in U} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left[\varphi(x)\mathcal{A}_u^* \left[\frac{\delta S(t, \varphi(\varkappa))}{\delta\varphi(x)} \right] - \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. - \,\omega(t, \varphi(x), u) \right] dx_{(2)} \right\} dx_{(1)} \right\} = 0, \\ \min_{\varphi(x)\in\mathfrak{F}} \left\{ S(t_1, \varphi(x)) + \theta(\varphi(x)) \right\} = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_u^*\psi(t, x) = \sum_{i=1}^n f_i(t, x, u) \frac{\partial\psi(t, x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, x, u) \frac{\partial^2\psi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} - \\ - \lambda(t, x)\psi(t, x) + \lambda(t, x) \int_{\mathbb{R}^n} q(t, z \,|\, x)\psi(t, z) dz. \end{gathered} \tag{9}$$

Если для некоторой функции $S(t, \varphi(x)) \in \mathfrak{S}$ условия (8) не выполняются, то можно рассмотреть функцию $S(t, \varphi(x)) + \gamma(t) \in \mathfrak{S}$, где $\gamma(t)$ выбирается исходя из (8).

Нетрудно видеть, что для любой функции $\psi(t, x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,2}(T \times \mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(t, x)\mathcal{A}_u\varphi(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x)\mathcal{A}_u^*\psi(t, x) dx.$$

Теорема 1. *Если существует функция $S(t, \varphi(x)) \in \mathfrak{S}$ такая, что элемент $d_m^* = (\varphi^*(t, x), u^*(t, x_{(1)})) \in \mathfrak{D}_m$ при почти всех $t \in T$ удовлетворяет условиям*

$$R(t, \varphi^*(t, x), u^*(t, x_{(1)})) = 0, \quad G(t_1, \varphi^*(t_1, x)) = 0,$$

то справедливо условие (4) и $J(\varphi_0(x), d_m^*) = -S(t_0, \varphi_0(x))$.

Доказательство теоремы 1. Применим принцип расширения [11, 12]. Пусть $\mathfrak{V}$ — множество пар $(\varphi(t, x), u(t, x_{(1)}))$, которые необязательно удовлетворяют уравнению (2), пусть также функции $\varphi(t, x)$ и $u(t, x_{(1)})$ могут иметь разрывы первого рода. Определим функционал качества на $\mathfrak{V}$:

$$L(\varphi_0(x), d_m) = G(t_1, \varphi(t_1, x)) - \int_{t_0}^{t_1} R(t, \varphi(t, x), u(t, x_{(1)})) dt - S(t_0, \varphi_0(x)),$$

тогда с учетом (6) и (7) имеем

$$\begin{gathered} L(\varphi_0(x), d_m) = S(t_1, \varphi(t_1, x)) + \theta(\varphi(t_1, x)) - S(t_0, \varphi_0(x)) - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial S(t, \varphi(t, x))}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\delta S(t, \varphi(t, x))}{\delta\varphi(x)} \mathcal{A}_{u(t, x_{(1)})}\varphi(t, x) - \right.\right. \\ \left.\left. - \,\omega(t, \varphi(t, x), u(t, x_{(1)})) \right] dx \right\} dt. \end{gathered}$$

Рассмотрим значения этого функционала на множестве $\mathfrak{D}_m$. Элементы $d_m \in \mathfrak{D}_m$ удовлетворяют уравнению (2), поэтому

$$\mathcal{A}_{u(t,x_{(1)})}\varphi(t,x) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t},$$

а полная производная функции $S(t,\varphi(t,x))$ по переменной t вычисляется по правилу [17]:

$$\frac{dS(t,\varphi(t,x))}{dt} = \frac{\partial S(t,\varphi(t,x))}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta S(t,\varphi(t,x))}{\delta\varphi(x)} \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} dx,$$

следовательно,

$$L(\varphi_0(x), d_m) = S(t,\varphi(t_1,x)) - S(t,\varphi_0(x)) - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dS(t,\varphi(t,x))}{dt} dt +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} \omega(t,\varphi(t,x),u(t,x_{(1)}))dtdx + \theta(\varphi(t_1,x)) = J(\varphi_0(x), d_m),$$

т.е. значения функционалов $J(\varphi_0(x), d_m)$ и $L(\varphi_0(x), d_m)$ совпадают на множестве $\mathfrak{D}_m$.

Для вычисления минимума функционала $L(\varphi_0(x), d_m)$ достаточно вычислить минимумы его слагаемых, что следует из свойств множества $\mathfrak{V}$. Тогда с учетом соотношений (8)

$$\min_{d_m\in\mathfrak{V}} L(\varphi_0(x), d_m) = \min_{d_m\in\mathfrak{V}} G(t_1,\varphi(t_1,x)) -$$
$$- \max_{d_m\in\mathfrak{V}} \int_{t_0}^{t_1} R(t,\varphi(t,x),u(t,x_{(1)}))dt - S(t_0,\varphi_0(x)) \geqslant -S(t_0,\varphi_0(x)),$$

так как

$$\max_{d_m\in\mathfrak{V}} \int_{t_0}^{t_1} R(t,\varphi(t,x),u(t,x_{(1)}))dt \leqslant 0.$$

Таким образом, если элемент $d_m^* \in \mathfrak{D}_m$ удовлетворяет условиям теоремы, то

$$L(\varphi_0(x), d_m^*) = \min_{d_m\in\mathfrak{V}} L(\varphi_0(x), d_m),$$

следовательно,

$$J(\varphi_0(x), d_m^*) = \min_{d_m\in\mathfrak{D}_m} J(\varphi_0(x), d_m) = -S(t_0,\varphi_0(x)),$$

так как $\mathfrak{D}_m$ — это подмножество $\mathfrak{V}$ и для произвольного $d_m \in \mathfrak{D}_m$ справедливо равенство $J(\varphi_0(x), d_m) = L(\varphi_0(x), d_m)$.

Теорема 2. *Если существуют $S(t,\varphi(x)) \in \mathfrak{S}$ и $u^*(t,x_{(1)},\varphi(x))$ такие, что при любых $\varphi(x) \in \mathfrak{F}$ и при почти всех $t \in T$ выполняются условия*

$$\frac{\partial S(t,\varphi(x))}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^m} \max_{u\in U}\left\{\int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left[\varphi(x)\mathcal{A}_u^*\left[\frac{\delta S(t,\varphi(\varkappa))}{\delta\varphi(x)}\right] -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \,\omega(t,\varphi(x),u)\right] dx_{(2)}\right\} dx_{(1)} = 0, \quad S(t_1,\varphi(x)) + \theta(\varphi(x)) = 0,$$

то справедливо условие (5).

Доказательство теоремы 2. Пусть $u^*(t, x_{(1)}, \varphi(x))$ — оптимальная синтезирующая функция, а $\varphi_0(x)$ — произвольная допустимая плотность вероятности начального состояния X_0. Тогда, решая (2) с учетом оптимальной синтезирующей функции, получаем функцию $\varphi^*(t,x)$.

Рассмотрим значение функционала $J(\varphi_0(x), d_m)$. Воспользуемся определением функционала $L(\varphi_0(x), d_m)$, так как $J(\varphi_0(x), d_m) = L(\varphi_0(x), d_m)$ на множестве $\mathfrak{D}_m$ (см. доказательство теоремы 1). Из условий теоремы следует, что

$$R(t, \varphi^*(t,x), u^*(t, x_{(1)}, \varphi^*(t,x))) = 0, \quad G(t_1, \varphi^*(t_1, x)) = 0,$$

т.е. $J(\varphi_0(x), d_m^*) = -S(t_0, \varphi_0(x))$, где $d_m^* = (\varphi^*(t,x), u^*(t, x_{(1)}, \varphi^*(t,x)))$. Пусть элемент $d'_m = (\varphi'(t,x), u'(t, x_{(1)})) \in \mathfrak{D}_m$ такой, что функция $\varphi'(t,x)$ удовлетворяет (2) с тем же начальным условием, тогда

$$R(t, \varphi'(t,x), u'(t, x_{(1)})) \leqslant 0, \quad G(t_1, \varphi'(t_1, x)) = 0.$$

Следовательно, $J(\varphi_0(x), d_m^*) \leqslant J(\varphi_0(x), d'_m)$.

4. Соотношения для определения оптимального управления

Пусть

$$\Psi(t,x,u) = \varphi^*(t,x) \mathcal{A}_u^* \left[\frac{\delta S(t, \varphi^*(t,x))}{\delta \varphi(x)} \right] - \omega(t, \varphi^*(t,x), u).$$

Тогда, используя соотношения (8) и первое условие теоремы 1, можно записать структуру оптимального управления:

$$u^*(t, x_{(1)}) = \arg\max_{u \in U} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \Psi(t,x,u) dx_{(2)} \right\}. \tag{10}$$

В частном случае оптимальное программное управление ($m = 0$) и управление с полной обратной связью ($m = n$) определяются выражениями

$$u^*(t) = \arg\max_{u \in U} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t,x,u) dx \right\}, \quad u^*(t,x) = \arg\max_{u \in U} \{ \Psi(t,x,u) \}.$$

Необходимые условия экстремума в (6) и (7) записываются в форме

$$\frac{\delta R(t, \varphi^*(t,x), u^*(t, x_{(1)}))}{\delta \varphi(x)} = 0, \quad \frac{\delta G(t_1, \varphi^*(t_1, x))}{\delta \varphi(x)} = 0,$$

или

$$\frac{\delta S_t(t, \varphi^*(t,x))}{\delta \varphi(x)} = -\frac{\delta H(t, \varphi^*(t,x), u^*(t, x_{(1)}))}{\delta \varphi(x)} \quad \left(S_t(t, \varphi(x)) = \frac{\partial S(t, \varphi(x))}{\partial t} \right), \tag{11}$$

$$\frac{\delta S(t_1, \varphi^*(t_1, x))}{\delta \varphi(x)} = -\frac{\delta \theta(\varphi^*(t_1, x))}{\delta \varphi(x)}, \tag{12}$$

где функция $H(t,\varphi(x),u)$ задается выражением

$$H(t,\varphi(x),u) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\varphi(x)\mathcal{A}_u^*\left[\frac{\delta S(t,\varphi(\varkappa))}{\delta\varphi(x)}\right] - \omega(t,\varphi(x),u)\right]dx.$$

В (10)–(12) функция $\varphi^*(t,x)$ является решением (2). Окончательный вид уравнений (11) и (12) для нахождения оптимального управления зависит от решаемой задачи и, следовательно, от задания функции $S(t,\varphi(x)) \in \mathfrak{S}$.

5. Синтез оптимального в среднем управления

Пусть функция $\omega(t,\varphi(t,x),u)$ и функционал $\theta(\varphi(x))$ в (3) заданы следующим образом:

$$\omega(t,\varphi(t,x),u) = \omega(t,x,u)\varphi(t,x), \quad \theta(\varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta(x)\varphi(x)dx,$$

и, следовательно, функционал качества

$$J(\varphi_0(x),d_m) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} \omega(t,x,u(t,x_{(1)}))\varphi(t,x)dtdx + \int_{\mathbb{R}^n}\theta(x)\varphi(t_1,x)dx \tag{13}$$

является линейным по плотности вероятности $\varphi(t,x)$ вектора состояния X. Его можно представить в виде

$$J(\varphi_0(x),d_m) = \mathbb{M}\left[\int_{t_0}^{t_1}\omega(t,X(t),u(t,X_{(1)}(t)))dt + \theta(X(t_1))\right],$$

где $\mathbb{M}$ — знак математического ожидания. Предполагается, что функции $\omega(t,x,u)$: $T\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}$ и $\theta(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условию конечности величины (13) (см., например, [7, 16, 18]).

Будем искать $S(t,\varphi(x)) \in \mathfrak{S}$ в виде

$$S(t,\varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}^n}\psi(t,x)\varphi(x)dx, \tag{14}$$

где $\psi(t,x)$ — неизвестная функция, причем $\psi(t,x)$ является элементом пространства $W_2^{1,2}(T\times\Omega)$ для любого ограниченного множества $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, непрерывна и кусочно-дифференцируема по переменной t.

Известно [17], что для функции $S(t,\varphi(x))$, заданной выражением (14),

$$\frac{\delta S(t,\varphi(\varkappa))}{\delta\varphi(x)} = \psi(t,x),$$

поэтому

$$H(t,\varphi(x),u) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\big[\mathcal{A}_u^*\psi(t,x) - \omega(t,x,u)\big]dx,$$

а также

$$\frac{\delta S_t(t,\varphi(\varkappa))}{\delta\varphi(x)} = \frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t}, \quad \frac{\delta H(t,\varphi(\varkappa),u)}{\delta\varphi(x)} = \mathcal{A}_u^*\psi(t,x) - \omega(t,x,u),$$

$$\frac{\delta S(t_1,\varphi(\varkappa))}{\delta\varphi(x)} = \psi(t_1,x), \quad \frac{\delta\theta(\varphi(\varkappa))}{\delta\varphi(x)} = \theta(x).$$

Далее с учетом (9) и (10) получаем структуру оптимального управления:

$$u^*(t,x_{(1)}) = \arg\max_{u\in U}\left\{\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\left[\mathcal{A}_u^*\psi(t,x)-\omega(t,x,u)\right]\varphi^*(t,x)dx_{(2)}\right\}, \tag{15}$$

или

$$\begin{aligned}
u^*(t,x_{(1)}) &= \arg\max_{u\in U}\left\{\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\left[\sum_{i=1}^n f_i(t,x,u)\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}(t,x,u)\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-\omega(t,x,u)\right]\varphi^*(t,x)dx_{(2)}\right\} =\\
&= \arg\max_{u\in U}\left\{\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\left[\sum_{i=1}^n f_i(t,x,u)\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}(t,x,u)\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-\omega(t,x,u)\right]\varphi^*(t,x_{(2)}|x_{(1)})dx_{(2)}\right\},
\end{aligned}$$

где

$$\varphi^*_{(2|1)}(t,x_{(2)}|x_{(1)}) = \frac{\varphi^*(t,x)}{\varphi^*_{(1)}(t,x_{(1)})}, \quad \varphi^*_{(1)}(t,x_{(1)}) = \int_{\mathbb{R}^{n-m}}\varphi^*(t,x)dx_{(2)}.$$

В предельных случаях информированности получаем структуру оптимального программного управления ($m=0$) и управления с полной обратной связью ($m=n$):

$$u^*(t) = \arg\max_{u\in U}\left\{\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\left[\mathcal{A}_u^*\psi(t,x)-\omega(t,x,u)\right]\varphi^*(t,x)dx\right\}, \tag{16}$$

$$u^*(t,x) = \arg\max_{u\in U}\left[\mathcal{A}_u^*\psi(t,x)-\omega(t,x,u)\right]. \tag{17}$$

Учитывая полученные выражения и уравнения (2), (11), (12), можно записать соотношения для определения функций $\varphi^*(t,x)$ и $\psi(t,x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi^*(t,x)}{\partial t} &= \mathcal{A}_{u^*(t,x_{(1)})}\varphi^*(t,x) =\\
&= -\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i(t,x,u^*(t,x_{(1)}))\varphi^*(t,x)\right]+\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[g_{ij}(t,x,u^*(t,x_{(1)}))\varphi^*(t,x)\right]-\\
&-\lambda(t,x)\varphi^*(t,x)+\int_{\mathbb{R}^n}\lambda(t,z)q(t,x\,|\,z)\varphi^*(t,z)dz,\\
\varphi^*(t_0,x) &= \varphi_0(x);
\end{aligned} \tag{18}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = -\mathcal{A}^*_{u^*(t,x_{(1)})}\psi(t,x) + \omega(t,x,u^*(t,x_{(1)})) = \\
&\qquad = -\sum_{i=1}^{n} f_i(t,x,u^*(t,x_{(1)}))\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i} - \\
&\qquad - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(t,x,u^*(t,x_{(1)}))\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j} + \\
&\qquad + \lambda(t,x)\psi(t,x) - \lambda(t,x)\int_{\mathbb{R}^n} q(t,z\,|\,x)\psi(t,z)dz + \omega(t,x,u^*(t,x_{(1)})). \\
&\psi(t_1,x) = -\theta(x).
\end{aligned} \tag{19}
$$

Таким образом, для определения оптимального управления необходимо решить систему (18), (19) с учетом (15). После определения функций $\psi(t,x)$ можно вычислить минимум функционала (13):

$$
J(\varphi_0(x), d^*_m) = -\int_{\mathbb{R}^n}\psi(t_0,x)\varphi_0(x)dx.
$$

При синтезе управления с полной обратной связью ($m=n$) соотношения (17) и (19) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&\max_{u\in U}\Bigg\{\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x,u)\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(t,x,u)\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j} - \\
&\qquad - \lambda(t,x)\psi(t,x) + \lambda(t,x)\int_{\mathbb{R}^n} q(t,z\,|\,x)\psi(t,z)dz - \omega(t,x,u)\Bigg\} = 0, \\
&\psi(t_1,x) = -\theta(x).
\end{aligned} \tag{20}
$$

Приведенные соотношения (16), (18), (19) и (20) аналогичны уравнениям стохастического принципа максимума и уравнению Беллмана для стохастических систем диффузионного типа [6–8, 16, 18]. Для систем диффузионно-скачкообразного типа такие соотношения приведены в [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-08-00892-а).

Список литературы

1. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. 632 с.
2. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. 488 с.
3. Hanson F.B. Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis, and Computation. SIAM, 2007. 472 p.
4. Øksendal B., Sulem A. Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Springer, 2005. 266 p.
5. Situ R. Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications. Springer, 2005. 454 p.
6. Пантелеев А.В. Достаточные условия оптимальности управления непрерывными стохастическими системами по неполному вектору состояния // Известия вузов. Математика. 1990. № 11. С. 50-61.

7. Пантелеев А.В., Семенов В.В. Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 1992. 192 с.
8. Савастюк С.В., Хрусталев М.М. Оптимизация стохастических систем диффузионного типа с ограничениями на процесс управления-наблюдения // Автоматика и телемеханика. 1991. № 7. С. 89-96; № 8. С. 94-100.
9. Плотников М.Ю., Хрусталев М.М. Условия глобальной оптимальности стратегий управления диффузионными процессами с возможностью обрыва траекторий при неполной информации о состоянии // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. № 1. С. 40-47.
10. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Советское радио, 1976. 184 с.
11. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1997. 288 с.
12. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 448 с.
13. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. № 3. С. 85-116. http://www.math.spbu.ru/diffjournal
14. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
15. Анулова С.В., Веретенников А.Ю., Крылов Н.В., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Стохастическое исчисление // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 45. М.: ВИНИТИ, 1989. 260 с.
16. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 2012. 160 с.
17. Авербух В.И., Смолянов О.Г. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // Успехи математических наук. 1967. Т. XXII, Вып. 6 (138). С. 201-260.
18. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978. 320 с.