УДК 519.676

# ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ РОБАСТНОГО УРАВНЕНИЯ ДУНКАНА – МОРТЕНСЕНА – ЗАКАИ

**К.А. Рыбаков**

*Московский авиационный институт*

Россия, 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: rkoffice@mail.ru

**Ключевые слова:** апостериорная плотность вероятности, ветвящиеся процессы, метод статистических испытаний, оптимальная фильтрация, стохастическая система, уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи

**Аннотация:** Предлагается новый алгоритм решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации методом статистических испытаний. В основе алгоритма лежит переход от задачи фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий, использующий общность структуры робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи и обобщенного уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. Решение такой задачи анализа можно найти приближенно, используя методы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

## 1. Введение

Ранее в статьях [1–3] были предложены новые подходы и алгоритмы приближенного решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации сигналов в стохастических дифференциальных системах (задачи нахождения оценки текущего состояния, оптимальной в соответствии с заданным критерием, по результатам измерений для нелинейной стохастической системы, математическая модель которой задается стохастическим дифференциальным уравнением). Для формирования алгоритмов использовалась общность структуры уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи и робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи при фиксированных измерениях, описывающих изменение ненормированной апостериорной плотности вероятности вектора состояния системы наблюдения и некоторого вспомогательного распределения соответственно [4–6], и обобщенного уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова, которому удовлетворяет плотность вероятности стохастической системы с поглощением и восстановлением траекторий [7, 8]. Основная идея разработанных алгоритмов — сведение задачи оптимальной нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий, которую можно приближенно решить с помощью методов численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений и методов моделирования неоднородных пуассоновских потоков, т.е. с применением метода статистических испытаний (метода Монте-Карло). Алгоритм приближенного решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации на основе робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи приведен в [3], здесь предлагается модификация этого алгоритма, не имеющая жестких ограничений на выбор шага численного интегрирования.

## 2. Постановка задачи

Будем рассматривать модель объекта наблюдения, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито [4, 5]

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $t \in [t_0, T]$, $[t_0, T]$ — отрезок времени функционирования; $f(t,x)\colon [t_0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функция $n \times 1$, $\sigma(t,x)\colon [t_0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times s}$ — матричная функция $n \times s$; $W(t)$ — $s$-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния $X_0$, заданного плотностью вероятности $\varphi_0(x)$.

Упрощенная (стационарная) модель измерительной системы записывается в форме стохастического дифференциального уравнения

$$dY(t) = c\big(X(t)\big)dt + dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \tag{2}$$

в котором $Y \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений; $c(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — вектор-функция $m \times 1$; $V(t)$ — $m$-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $W(t)$ и $X_0$.

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t)$ по результатам измерений $Y_0^t$, т.е. $\hat{X}(t) = \psi(t, Y_0^t)$, где $\psi(t, Y_0^t)$ — функция, обеспечивающая в каждый момент времени $t$ выполнение условия

$$\mathbb{M}\Big[\big(X(t) - \hat{X}(t)\big)^{\mathrm{T}}\big(X(t) - \hat{X}(t)\big)\Big] \to \min_{\psi(t,\cdot)}, \tag{3}$$

а $Y_0^t = \{Y(\tau),\ \tau \in [t_0, t)\}$ — доступные измерения к моменту времени $t$. В критерии (3) и далее $\mathbb{M}$ — знак математического ожидания.

Известно [4, 5, 9], что в этом случае

$$\psi(t, Y_0^t) = \mathbb{M}\big[X(t)|Y_0^t\big] = \int_{\mathbb{R}^n} x p(t, x|Y_0^t)dx,$$

где $p(t, x|Y_0^t)$ — апостериорная плотность вероятности вектора состояния $X$.

Предлагаемая ниже методика оптимальной фильтрации не исключает других критериев, отличных от (3).

Разработанный алгоритм оценивания предполагает использование методов численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений и методов моделирования неоднородных пуассоновских потоков, в связи с этим условия существования решения поставленной задачи (см., например, [10–12]) при необходимости дополняются условиями применимости конкретных численных методов.

# 3. Уравнения для апостериорной плотности вероятности

Ненормированная апостериорная плотность вероятности $\varphi(t,x|Y_0^t)$ вектора состояния $X$ удовлетворяет уравнению [4,5]

$$\frac{d_{\frac{1}{2}}\varphi(t,x|Y_0^t)}{dt} = \mathcal{L}\varphi(t,x|Y_0^t) + \frac{dY^{\mathrm{T}}(t)}{dt}c(x)\varphi(t,x|Y_0^t), \quad \varphi(t_0,x)=\varphi_0(x), \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\varphi(t,x|Y_0^t) = \mathcal{A}\varphi(t,x|Y_0^t) - \frac{1}{2}c^{\mathrm{T}}(x)c(x)\varphi(t,x|Y_0^t),\\
&\mathcal{A}\varphi(t,x|Y_0^t) = -\nabla^{\mathrm{T}}\bigl(f(t,x)\varphi(t,x|Y_0^t)\bigr) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\bigl(\nabla\nabla^{\mathrm{T}}\bigl(g(t,x)\varphi(t,x|Y_0^t)\bigr)\bigr),\\
&g(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^{\mathrm{T}}(t,x).
\end{aligned}$$

Это уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи в форме Стратоновича. Зная его решение, нетрудно получить апостериорную плотность вероятности $p(t,x|Y_0^t)$:

$$p(t,x|Y_0^t) = \frac{\varphi(t,x|Y_0^t)}{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t,x|Y_0^t)dx}, \quad t>t_0, \quad p(t_0,x)=\varphi_0(x). \tag{5}$$

С помощью замены

$$\rho(t,x|Y_0^t) = \mathrm{e}^{-c^{\mathrm{T}}(x)Y(t)}\varphi(t,x|Y_0^t) \tag{6}$$

и введения обозначения $\mathcal{C}_\alpha$ для оператора умножения на функцию $c_\alpha(x)$, $\alpha=1,2,\ldots,m$, получаем робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи [6]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho(t,x|Y_0^t)}{\partial t} &= \mathcal{L}\rho(t,x|Y_0^t) - \sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(t)\mathcal{L}_\alpha\rho(t,x|Y_0^t) + \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}Y_\alpha(t)Y_\beta(t)\mathcal{L}_{\alpha\beta}\rho(t,x|Y_0^t),
\end{aligned} \tag{7}$$

в котором $\mathcal{L}_\alpha=[\mathcal{C}_\alpha,\mathcal{L}]$, $\mathcal{L}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}[\mathcal{C}_\alpha,\mathcal{L}_\beta]=\frac{1}{2}\bigl[\mathcal{C}_\alpha,[\mathcal{C}_\beta,\mathcal{L}]\bigr]$, где $[\mathcal{C}_\alpha,\mathcal{L}]$ и $[\mathcal{C}_\alpha,\mathcal{L}_\beta]$ — коммутаторы операторов.

Уравнение (7) при фиксированных измерениях $Y_0^t$ — детерминированное уравнение в частных производных второго порядка. В отличие от (4) оно не содержит множителей типа белого шума, что делает его удобным для применения различных численных методов.

В [3] получена другая форма записи этого уравнения, а именно

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho(t,x|Y_0^t)}{\partial t} &= \widetilde{\mathcal{A}}\rho(t,x|Y_0^t) - \\
&- \nu^-\bigl(t,x,Y(t)\bigr)\rho(t,x|Y_0^t) + \nu^+\bigl(t,x,Y(t)\bigr)\rho(t,x|Y_0^t),
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{A}}\rho(t,x|Y_0^t) &= -\nabla^{\mathrm{T}}\bigl(\widetilde{f}\bigl(t,x,Y(t)\bigr)\rho(t,x|Y_0^t)\bigr) + \\
&+ \frac{1}{2}\operatorname{tr}\bigl(\nabla\nabla^{\mathrm{T}}\bigl(g(t,x)\rho(t,x|Y_0^t)\bigr)\bigr),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{f}(t,x,y) = f(t,x) - g(t,x)\left[\frac{\partial c(x)}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}} y,\\
&\nu^{-}(t,x,y) = \begin{cases} -\nu(t,x,y), & \nu(t,x,y) < 0,\\ 0, & \nu(t,x,y) \geqslant 0,\end{cases}\\
&\nu^{+}(t,x,y) = \begin{cases} \nu(t,x,y), & \nu(t,x,y) > 0,\\ 0, & \nu(t,x,y) \leqslant 0,\end{cases}\\
&\nu(t,x,y) = -y^{\mathrm{T}}\frac{\partial c(x)}{\partial x} f(t,x) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\bigl(g(t,x)\nabla\nabla^{\mathrm{T}}\bigl(y^{\mathrm{T}}c(x)\bigr)\bigr) -\\
&\qquad -\frac{1}{2}c^{\mathrm{T}}(x)c(x) + \frac{1}{2}y^{\mathrm{T}}\frac{\partial c(x)}{\partial x} g(t,x)\left[\frac{\partial c(x)}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}} y.
\end{aligned}
$$

Если уравнение, описывающее измерительную систему, линейно, т.е. $c(x) = Cx$, где $C$ — матрица $m \times n$, то выражения для функций $\widetilde{f}(t,x,y)$ и $\nu(t,x,y)$ очевидным образом можно упростить:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{f}(t,x,y) = f(t,x) - g(t,x)C^{\mathrm{T}}y,\\
&\nu(t,x,y) = -y^{\mathrm{T}}Cf(t,x) - \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}Cx + \frac{1}{2}y^{\mathrm{T}}Cg(t,x)C^{\mathrm{T}}y.
\end{aligned}
$$

Уравнение (8) описывает закон изменения ненормированной апостериориной плотности вероятности вектора состояния $\widetilde{X} = \widetilde{X}(t)$ для системы, задаваемой уравнением Ито

$$
d\widetilde{X}(t) = \widetilde{f}\bigl(t,\widetilde{X}(t),Y(t)\bigr)dt + \sigma\bigl(t,\widetilde{X}(t)\bigr)d\widetilde{W}(t), \quad \widetilde{X}(t_0) = X_0, \tag{9}
$$

в котором $\widetilde{W}(t)$ — $s$-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния $X_0$.

Начальное условие для уравнения (8) задается соотношением $\rho(t_0,x|Y_0^t) = \varphi_0(x)$, так как $\mathrm{e}^{-c^{\mathrm{T}}(x)Y_0} = 1$, а слагаемые $\nu^{-}(t,x,Y(t))\rho(t,x|Y_0^t)$ и $\nu^{+}(t,x,Y(t))\rho(t,x|Y_0^t)$ характеризуют обрывы и ветвления траекторий процесса $\widetilde{X}(t)$ (см., например, [7, 8]): функция $\nu^{-}(t,x,y)$ — интенсивность обрыва траекторий, а функция $\nu^{+}(t,x,y)$ — интенсивность ветвления траекторий. Вероятности обрыва и ветвления на промежутке времени $[t,t+\Delta t]$ при $\widetilde{X}(t) = x$ и $Y(t) = y$ выражаются следующим образом:

$$
\widetilde{\mathbb{P}}^{-}(t,\Delta t) = \nu^{-}(t,x,y)\Delta t + o(\Delta t), \quad \widetilde{\mathbb{P}}^{+}(t,\Delta t) = \nu^{+}(t,x,y)\Delta t + o(\Delta t).
$$

Для системы (9) процесс $Y(t)$ управляет распределением моментов времени появления обрывов и ветвлений. Он же влияет и на поведение траекторий между моментами ветвлений или до обрыва.

Для нахождения оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ может быть применена формула, полученная с помощью (5) и (6):

$$
\hat{X}(t) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x\varphi(t,x|Y_0^t)dx}{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t,x|Y_0^t)dx} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x\mathrm{e}^{c^{\mathrm{T}}(x)Y(t)}\rho(t,x|Y_0^t)dx}{\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{c^{\mathrm{T}}(x)Y(t)}\rho(t,x|Y_0^t)dx}.
$$

# 4. Приближенный метод оптимального оценивания

Для приближенного определения оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ предлагается использовать метод статистических испытаний, т.е. моделировать траектории вспомогательного случайного процесса $\widetilde{X}(t)$ с учетом обрывов и ветвлений при фиксированных измерениях $Y_0^t$. При этом можно применять известные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков [4,13], получая оценку в темпе с поступлением измерений.

Тогда

$$X_{k+1} = F(t_k, X_k, \Delta W_k, h), \quad Y_{k+1} = G(Y_k, \Delta V_k, h), \quad t_k = t_0 + hk,$$
$$\widetilde{X}_{k+1} = \widetilde{F}(t_k, \widetilde{X}_k, Y_k, \Delta\widetilde{W}_k, h), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \widetilde{X}_0 = X_0,$$

где, например, при использовании стохастического метода Эйлера

$$F(t, X_k, \Delta W_k, h) = X_k + hf(t, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t, X_k)\Delta W_k,$$
$$G(X_k, Y_k, \Delta V_k, h) = Y_k + hc(X_k) + \sqrt{h}\Delta V_k,$$
$$\widetilde{F}(t, X_k, Y_k, \Delta\widetilde{W}_k, h) = X_k + h\widetilde{f}(t, X_k, Y_k) + \sqrt{h}\sigma(t, X_k)\Delta\widetilde{W}_k.$$

В этих соотношениях $\Delta W_k$, $\Delta V_k$ и $\Delta\widetilde{W}_k$ — случайные векторы $s \times 1$, $m \times 1$ и $s \times 1$ соответственно, их координаты независимы и имеют стандартное нормальное распределение, $h$ — шаг численного интегрирования.

Таким образом, $X(t_k) \approx X_k$, $Y(t_k) \approx Y_k$, $\widetilde{X}(t_k) \approx \widetilde{X}_k$ (здесь нижний индекс $k$ указывает на соответствие векторов $X_k$, $Y_k$, $\widetilde{X}_k$, $\Delta W_k$, $\Delta V_k$ и $\Delta\widetilde{W}_k$ моменту времени $t_k$ и не является номером координаты вектора).

Для повышения точности расчетов могут применяться методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений, имеющие больший порядок точности, нежели стохастический метод Эйлера (для апробации применялись модификации метода Эйлера и метод Рунге–Кутты [4,14]).

Моделирование моментов времени обрывов и ветвлений траекторий осуществляется с помощью метода «максимального сечения» [13].

### Алгоритм совместного моделирования системы наблюдения и оптимального оценивания

Шаг 1. Задать $M$ — число моделируемых вспомогательных траекторий; $h$ — шаг численного интегрирования; величину $\nu^*$: $|\nu(t, X(t), Y(t))| \leqslant \nu^*$. Получить реализации начальных состояний $X_0$ и $\widetilde{X}_0^i$ согласно заданной плотности вероятности $\varphi_0(x)$, где $X_0$ — начальное состояние для основной траектории (для которой проводятся измерение и оценивание), $\widetilde{X}_0^i$ — для вспомогательных траекторий, по которым приближенно вычисляется оптимальная оценка, и моменты времени $\xi^i$, через которые могут произойти обрывы или ветвления траекторий: $\xi^i = -\frac{\ln\beta}{\nu^*}$, $i = 1, 2, \ldots, M$.

Здесь и далее $\beta$ — различные реализации (для всех $i$) случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$.

Положить $Y_0 = 0$, $k = 0$, $t_*^i = t_0$, $F_0^i = 1$ (в случае обрыва траектории с номером $i$ при последующем моделировании $F_k^i = 0$, $k > 0$), $i = 1, 2, \ldots, M$.

Шаг 2. Положить $M_k = \sum_{i=1}^M F_k^i$ $(M_0 = M)$ и оценить плотность вероятности $\tilde{p}(t_k, x|Y_0^{t_k})$ по выборке $\widetilde{\mathbb{X}}_k = \{\widetilde{X}_k^i\}_{i=1,\ldots,M;F_k^i=1}$.

Найти приближенное решение $\rho(t_k, x|Y_0^{t_k})$ робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи при $t = t_k$:

$$\rho(t_k, x|Y_0^{t_k}) = \frac{M_k}{M}\tilde{p}(t_k, x|Y_0^{t_k}),$$

тогда приближенное решение $\varphi(t_k, x|Y_0^{t_k})$ уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи и оценка апостериорной плотности вероятности $p(t_k, x|Y_0^{t_k})$ выражаются следующим образом:

$$\varphi(t_k, x|Y_0^{t_k}) = \mathrm{e}^{c^{\mathrm{T}}(x)Y_k}\rho(t_k, x|Y_0^{t_k}), \quad p(t_k, x|Y_0^{t_k}) = \frac{\varphi(t_k, x|Y_0^{t_k})}{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t_k, x|Y_0^{t_k})dx}.$$

Найти оптимальную оценку:

$$\hat{X}_k = \int_{\mathbb{R}^n} xp(t_k, x|Y_0^{t_k})dx.$$

Проверить условия:

а) если $0 < T - t_k < h$, то скорректировать шаг численного интегрирования:

$$h = T - t_k;$$

б) если $T - t_k = 0$, то завершить процесс.

Получить реализацию оцениваемого вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1} = F(t_k, X_k, \Delta W, h),$$

и получить вектор измерений:

$$Y_{k+1} = G(X_k, Y_k, \Delta V, h).$$

В этих формулах $\Delta W$ и $\Delta V$ — случайные векторы $s \times 1$ и $m \times 1$ соответственно, координаты которых независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Положить $i = 1$, $j = 0$ ($j$ — количество новых ветвей на шаге $k$).

Шаг 3. Проверить условие $F_k^i = 0$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 10, иначе: при $t_*^i + \xi^i \geqslant t_k + h$ перейти к шагу 4, а при $t_*^i + \xi^i < t_k + h$ — к шагу 5.

Шаг 4. Получить реализацию вектора $\widetilde{X}$ (сечения вспомогательного случайного процесса $\widetilde{X}(t)$) в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$\widetilde{X}_{k+1}^i = \widetilde{F}(t_k, \widetilde{X}_k, Y_k, \Delta\widetilde{W}, h).$$

Здесь и далее $\Delta\widetilde{W}$ — случайный вектор $s \times 1$, координаты которого независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Положить $F_{k+1}^i = 1$ и перейти к шагу 10.

Шаг 5. Проверить условие $t_*^i + \xi^i \geqslant t_k + h$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 9, иначе: положить $\tilde{X}^i = \widetilde{X}_k^i$, $\tilde{Y}^i = Y_k$, $\tau^i = t_k$ и перейти к шагу 6.

Шаг 6. Найти вектор измерений с помощью линейной интерполяции:

$$\tilde{Y}^i = Y_k + \frac{h^i}{h}(Y_{k+1} - Y_k),$$

и получить реализацию вектора $\widetilde{X}$ в дополнительном узле сетки:

$$\tilde{X}^i = \widetilde{F}(\tau^i, \tilde{X}^i, \tilde{Y}^i, \Delta\widetilde{W}, h^i), \quad h^i = t_*^i + \xi^i - \tau^i.$$

Положить $\tau^i = \tau^i + h^i$ и получить реализацию $\alpha$ случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$. Проверить условие [13]

$$\alpha \leqslant \frac{|\nu(\tau^i)|}{\nu^*},$$

где $\nu(\tau^i) = \nu(\tau^i, \tilde{X}^i, \tilde{Y}^i)$, и если оно выполнено, то перейти к шагу 7, иначе — к шагу 8.

Шаг 7. Проверить условия:

а) если $\nu(\tau^i) < 0$ $(\nu^-(\tau^i, \tilde{X}^i, \tilde{Y}^i) > 0$, обрыв траектории), то положить $F_{k+1}^i = 0$ (траектория далее не моделируется) и перейти к шагу 10;

б) если $\nu(\tau^i) > 0$ $(\nu^+(\tau^i, \tilde{X}^i, \tilde{Y}^i) > 0$, ветвление траектории), то положить $j = j + 1$, $F_r^{M+j} = 0$ $(r = 0, 1, \ldots, k)$, $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$, $\tilde{X}^{M+j} = \tilde{X}^i$, $\tilde{Y}^{M+j} = \tilde{Y}^i$, $\tau^{M+j} = \tau^i$ и получить реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или новое ветвление:

$$\xi^{M+j} = -\frac{\ln\beta}{\nu^*}.$$

Шаг 8. Положить $t_*^i = t_*^i + \xi^i$ и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или ветвление рассматриваемой траектории:

$$\xi^i = -\frac{\ln\beta}{\nu^*}.$$

Перейти к шагу 5.

Шаг 9. Получить реализацию вектора $\widetilde{X}$ в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$\widetilde{X}_{k+1}^i = \widetilde{F}(\tau^i, \tilde{X}^i, \tilde{Y}^i, \Delta\widetilde{W}, h^i), \quad h^i = t_k + h - \tau^i.$$

Положить $F_{k+1}^i = 1$.

Шаг 10. Проверить условия:

а) если $i = M + j$, то положить $M = M + j$, $t_{k+1} = t_k + h$, $k = k + 1$ и перейти к шагу 2;

б) если $i < M$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 3;

в) если $M \leqslant i < M + j$ (новые ветви), то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 5.

**Замечания и дополнения.**

1. Величину $\nu^*$ можно оценить, например, по результатам пробного моделирования траекторий системы наблюдения.

2. Оценку плотности вероятности $\tilde{p}(t_k, x|Y_0^{t_k})$ по выборке на шаге 2 можно осуществлять различными способами [15]. В [1,3] для этого использовалась гистограмма. На этом же шаге можно получить ковариационную матрицу ошибки оценивания для момента времени $t_k$:

$$\hat{\Gamma}_k = \int_{\mathbb{R}^n} (x - \hat{X}_k)(x - \hat{X}_k)^{\mathrm{T}} p(t_k, x|Y_0^{t_k})\,dx.$$

Кроме того, поскольку на этом шаге получена оценка апостериорной плотности вероятности $p(t_k, x|Y_0^{t_k})$, возможно использование критериев при нахождении оценки вектора состояния, отличных от (3), например, получение оценки, соответствующей максимуму апостериорной плотности вероятности [4]:

$$\hat{X}(t) = \arg\max_{x\in\mathbb{R}^n} p(t, x|Y_0^t),$$

т.е., учитывая, что величины $M$, $M_k$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t_k, x|Y_0^{t_k})dx$ не зависят от $x$, получаем оценку

$$\hat{X}_k = \arg\max_{x\in\mathbb{R}^n} \bigl\{ \mathrm{e}^{c^{\mathrm{T}}(x)Y_k} \tilde{p}(t_k, x|Y_0^{t_k}) \bigr\}.$$

3. На шаге 6 вектор измерений можно определять с помощью других методов интерполяции, однако это усложнит алгоритм и дополнительно увеличит время оценивания.

4. При расчетах на ЭВМ необязательно хранить значения $X_k^i$ и $F_k^i$ после нахождения оценки $\hat{X}_k$. Для хранения векторов состояния на новых траекториях, полученных в результате ветвления, можно использовать память, освободившуюся в результате обрывов траекторий (признак обрыва — $F_k^i = 0$).

5. Возможна ситуация, когда при моделировании количество обрывов существенно больше количества ветвлений траекторий. Тогда фильтр «вырождается», но в таком случае можно добавлять новые траектории, восполняя «потери» при обрывах, используя известную на каждом шаге оценку плотности вероятности состояния фильтра или оценку функции распределения. Если при моделировании количество ветвлений существенно больше количества обрывов траекторий, то траектории нужно «прореживать» для экономии памяти (пример приближенного решения задачи оптимальной фильтрации при использовании «прореживания» приведен в работе [1] для алгоритма, в основе которого лежит общность структуры уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи и обобщенного уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова). Однако добавление или удаление реализаций $\widetilde{X}_k^i$ изменяет значение $M_k$ и, следовательно, отношение $\frac{M_k}{M}$, которое используется на шаге 2 для получения приближенного решения робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи. Поэтому при изменении количества реализаций $\widetilde{X}_k^i$ по причинам, не связанным с обрывами или ветвлениями, нужно исходить из условия $\frac{M_k}{M} = \mathrm{const}$ в конкретный момент времени $t_k$.

6. Предложенный алгоритм можно обобщить на случай, когда коэффициенты уравнения (2), задающего модель измерительной системы, зависят от времени [16], а также для систем диффузионно-скачкообразного типа. Кроме того, предложенные в [1–3] алгоритмы, а также алгоритм, рассмотренный выше, могут послужить основой для построения приближенных методов и алгоритмов прогнозирования состояний в стохастических дифференциальных системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-08-00323-а).

# Список литературы

1. Рыбаков К.А. Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. № 3. С. 91-110. http://www.math.spbu.ru/diffjournal

2. Рыбаков К.А. Модифицированный алгоритм оптимальной фильтрации сигналов на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Авиакосмическое приборостроение. 2013. № 3. С. 15-20.
3. Рыбаков К.А. Приближенное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации для стохастических дифференциальных систем методом статистических испытаний // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 16, № 4. С. 377-391.
4. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. М.: Вузовская книга, 2008. 312 с.
5. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Советское радио, 1975. 704 с.
6. Hazewinkel M. Lectures on linear and nonlinear filtering // Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems (ed. by W.O. Schiehlen, W. Wedig). Springer, 1988. P. 103-136.
7. Артемьев В.М. Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. Минск: Вышэйшая школа, 1979. 160 с.
8. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993. 272 с.
9. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2006. 640 с.
10. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974. 696 с.
11. Bain A., Crisan D. Fundamentals of Stochastic Filtering. Springer, 2009. 390 p.
12. Yau S.-T., Yau S.S.-T. Existence and uniqueness of solutions for Duncan – Mortensen – Zakai equations // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. IEEE, 2005. P. 536-541.
13. Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. 2009. Т. 428, № 2. С. 163-165.
14. Башкирев А.В., Рыбаков К.А. Программная реализация алгоритмов оптимальной фильтрации на основе моделирования специальных ветвящихся процессов // Авиация и космонавтика – 2013. XII Международная конференция, Москва, 12-15 ноября 2013 г.: Тез. докл. СПб.: Мастерская печати, 2013. С. 591-592.
15. Деврой Л., Дьерфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. $L_1$-подход. М.: Мир, 1988. 408 с.
16. Luo X., Yau S.S.-T. Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory // IEEE Transactions on Automatic Control. 2013. Vol. 58, No. 10. P. 2563-2578.