

Построение множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания

К. А. РЫБАКОВ¹

¹МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

*КОНТАКТНЫЙ E-MAIL: rkoffice@mail.ru

Описана методика построения спектрального аналога множества допустимых скалярных управлений динамической системой с геометрическими ограничениями — множества коэффициентов разложения управлений по ортонормированным функциям с учетом ограничений. Приведены примеры построения таких множеств с использованием полиномов Лежандра, тригонометрических функций и функций Уолша.

Ключевые слова: множество допустимых управлений, спектральная характеристика, спектральный метод.

1. Введение

Задачи оптимального управления динамическими системами, безусловно, сложны с вычислительной точки зрения. За десятилетия развития теории оптимальных систем разработаны многочисленные методы и подходы к приближенному решению таких задач [1–6].

Одним из методов решения различных задач, возникающих в теории управления, является спектральный метод, или метод матричных операторов, основанный на представлении искомого решения ортогональным рядом [5, 7–14]. Его основное преимущество состоит в том, что все операции производятся не с рядом, а только с его коэффициентами, и задача, которая может описываться, например, дифференциальными, интегральными, разностными соотношениями, сводится к алгебраической (линейной или нелинейной в зависимости от исходной задачи).

С момента появления спектрального метода были рассмотрены разнообразные базисные системы, относительно которых может быть построено разложение функций в ряды, — как полные, так и неполные ортогональные и биортогональные системы функций. В спектральной форме математического описания систем управления функции представляются матрицами-столбцами, линейные операторы — квадратными матрицами, линейные функционалы — матрицами-строками. Их называют спектральными характеристиками функций, спектральными характеристиками операторов, спектральными характеристиками линейных функционалов соответственно. Существуют и другие элементы, например, позволяющие рассматривать нелинейные операции, операции замены базиса, операции перехода от функций с непрерывно меняющимся аргументом к функциям дискретного аргумента [7, 8, 12].

Это препринт статьи, принятой для опубликования в журнале «Вычислительные технологии». — 2015, т. 20, № 3. — С. 58–74.

При постановке задач оптимального управления часто вводятся ограничения на управляющие воздействия. Для учета этих ограничений целесообразно построить аналог множества допустимых управлений как множество соответствующих спектральных характеристик функций, чтобы проверка на допустимость закона управления осуществлялась в рамках операций с коэффициентами ортогонального ряда без непосредственного перехода к функциям. В [9] аналогичная задача решалась для блочно-импульсных и кусочно-линейных функций, а в общем случае предлагалось проверять допустимость управления непосредственно.

Здесь предлагается общая методика построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания, применение которой позволит избежать постоянного перехода от спектральных характеристик к определяемым ими функциям. Рассматриваются часто используемые геометрические ограничения вида $|u(t)| \leq v$ на скалярное программное управление $u(t)$. Предлагаемая методика может быть использована при применении прямых методов оптимизации динамических систем [1, 6] при нахождении позиционного управления и для случая, когда управление — вектор-функция.

В работе приведены примеры приближенного построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания для классических базисов: полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функций Уолша [7–9, 11, 12, 15, 16]. Для функций Уолша найдено точное описание множества допустимых управлений.

2. Основные обозначения и постановка задачи

Будем предполагать, что задана функция $u(t): T \rightarrow \mathbb{R}^1$, $T = [t_0, t_1]$. Система функций $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис пространства $L_2(T; \nu(t))$, $\nu(t)$ — весовая функция:

$$(q(i, t), q(j, t))_{L_2(T; \nu(t))} = \int_{t_0}^{t_1} \nu(t) q(i, t) q(j, t) dt = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Функции $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ непрерывны либо односторонне непрерывны на T .

Таким образом, если $u(t) \in L_2(T; \nu(t))$, то

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q(i, t), \quad t \in T, \quad (1)$$

где u_i — коэффициенты разложения функции $u(t)$:

$$u_i = (q(i, t), u(t))_{L_2(T; \nu(t))} = \int_{t_0}^{t_1} \nu(t) q(i, t) u(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Спектральной характеристикой \mathbf{U} функции $u(t)$, определенной относительно базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$, называется [7, 8, 11, 12] упорядоченная совокупность коэффициентов разложения u_i , представленных в виде бесконечной матрицы-столбца (транспонированной матрицы-строки):

$$\mathbf{U} = [u_0 \ u_1 \ u_2 \ \dots]^T.$$

Преобразование, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику, называют спектральным преобразованием и обозначают \mathbb{S} , тогда

$$\mathbf{U} = \mathbb{S}[u(t)], \quad u(t) = \mathbb{S}^{-1}[\mathbf{U}], \quad \mathbb{S}^{-1} \text{ — обратное спектральное преобразование.}$$

Наряду с точным представлением функции $u(t)$ в виде ряда (1) можно рассматривать задачу приближенного представления в виде частичной суммы:

$$u(t) \approx u_L(t) = \sum_{i=0}^{L-1} u_i q(i, t), \quad (2)$$

где L , следуя [5, 11], будем называть порядком усечения спектральных характеристик. В этом случае спектральная характеристика представляется матрицей-столбцом:

$$\mathbf{U} = [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_{L-1}]^T \in \mathbb{R}^L.$$

Пространство $L_2(T; \nu(t))$ линейно, конечномерное подпространство $L_2(T; \nu(t))_L$, образованное первыми L базисными функциями $q(0, t), q(1, t), \dots, q(L-1, t)$, линейно по построению:

$$L_2(T; \nu(t))_L = \text{Lin}\{q(0, t), q(1, t), \dots, q(L-1, t)\},$$

поэтому множество всех спектральных характеристик функций из $L_2(T; \nu(t))_L$ совпадает с \mathbb{R}^L . Для функций из $L_2(T; \nu(t))$ множество всех спектральных характеристик — пространство квадратично суммируемых последовательностей l_2 (спектральное преобразование \mathbb{S} устанавливает взаимно однозначное соответствие пространств $L_2(T; \nu(t))$ и l_2 , конечно, с учетом того, что функции из $L_2(T; \nu(t))$, отличающиеся на множестве нулевой меры, эквивалентны [15]).

Предположим, что для функций $u(t)$ заданы дополнительные условия вида $|u(t)| \leq v$, часто используемые в задачах оптимального управления с ограничениями (v — заданное положительное число, t — время), т.е. $u(t)$ — допустимые управления некоторой динамической системой. Задача построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания состоит в построении множества спектральных характеристик $\mathbb{U}_L \subset \mathbb{R}^L$, соответствующего функциям из $L_2(T; \nu(t))_L \cap \{u(t) : |u(t)| \leq v\}$ при спектральном преобразовании \mathbb{S} с заданным порядком усечения L .

3. Свойства множества \mathbb{U}_L

Перечислим основные свойства множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания, которые требуется указать для формирования алгоритма приближенного построения этого множества.

1. *Выпуклость.* Если $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \in \mathbb{U}_L$, то $a_1 \mathbf{U}_1 + a_2 \mathbf{U}_2 \in \mathbb{U}_L$ для любых $a_1, a_2 \geq 0$, удовлетворяющих условию $a_1 + a_2 = 1$.

Действительно, пусть $u_1(t) = \mathbb{S}^{-1}[\mathbf{U}_1]$, $u_2(t) = \mathbb{S}^{-1}[\mathbf{U}_2]$. Тогда $|u_1(t)| \leq v$, $|u_2(t)| \leq v$ и, следовательно, $|a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)| \leq v$, поскольку $|a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)| \leq a_1 |u_1(t)| + a_2 |u_2(t)|$. Таким образом, $\mathbb{S}[a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)] = a_1 \mathbb{S}[u_1(t)] + a_2 \mathbb{S}[u_2(t)] = a_1 \mathbf{U}_1 + a_2 \mathbf{U}_2 \in \mathbb{U}_L$.

2. *Симметричность.* Если $\mathbf{U} \in \mathbb{U}_L$, то $-\mathbf{U} \in \mathbb{U}_L$.

Доказательство этого свойства аналогично предыдущему доказательству, а именно пусть $u(t) = \mathbb{S}^{-1}[\mathbf{U}]$, $|u(t)| \leq v$. Очевидно, что и $|-u(t)| \leq v$. Таким образом, $\mathbb{S}[-u(t)] = -\mathbb{S}[u(t)] = -\mathbf{U} \in \mathbb{U}_L$.

3. *Замкнутость.* Множество \mathbb{U}_L замкнуто.

Рассмотрим функцию $u(t) \in L_2(T; \nu(t))_L \cap \{u(t) : |u(t)| \leq v\}$ такую, что найдется $t^* \in T$, для которого $u(t^*) = v$ ($\max |u(t)| = v$; здесь и далее при аналогичной записи подразумевается, что максимум берется по $t \in T$), и ε -окрестность точки $\mathbf{U} = \mathbb{S}[u(t)]$ в \mathbb{R}^L , т.е. множество $U_\varepsilon = \{\mathbf{U}' : |\mathbf{U}' - \mathbf{U}| < \varepsilon\}$, где $|\mathbf{U}|$ — евклидова норма вектора \mathbf{U} . Тогда для произвольного $\varepsilon \in (0, |\mathbf{U}|)$ найдется такое $\delta \in (0, 1)$ (например, $\delta = \varepsilon/|\mathbf{U}|$), что

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[(1 - \delta)u(t)] &= (1 - \delta)\mathbb{S}[u(t)] = (1 - \delta)\mathbf{U} \in \mathbb{U}_L, \\ \mathbb{S}[(1 + \delta)u(t)] &= (1 + \delta)\mathbb{S}[u(t)] = (1 + \delta)\mathbf{U} \notin \mathbb{U}_L, \\ (1 - \delta)\mathbf{U} &\in U_\varepsilon, \quad (1 + \delta)\mathbf{U} \in U_\varepsilon, \end{aligned}$$

так как $|(1 - \delta)u(t)| < v$ и $|(1 + \delta)u(t)| > v$. Следовательно, $\mathbf{U} \in \mathbb{U}_L$ — граничная точка множества \mathbb{U}_L . Аналогично можно показать, что если $\mathbf{U} \in \mathbb{U}_L$ — граничная точка множества \mathbb{U}_L , то функция $u(t) = \mathbb{S}^{-1}[\mathbf{U}]$ достигает заданного ограничения v .

Напомним, кроме того, что \mathbb{S} — ортогональное преобразование, и если $u_1(t), u_2(t) \in L_2(T; \nu(t))_L$, $\mathbf{U}_1 = \mathbb{S}[u_1(t)]$, $\mathbf{U}_2 = \mathbb{S}[u_2(t)]$, то

$$(u_1(t), u_2(t))_{L_2(T; \nu(t))} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \mathbf{U}_1^T \mathbf{U}_2,$$

в частности

$$\|u(t)\|_{L_2(T; \nu(t))} = |\mathbf{U}|, \quad u(t) \in L_2(T; \nu(t))_L, \quad \mathbf{U} = \mathbb{S}[u(t)].$$

Нетрудно видеть, что

$$\max_{|u(t)| \leq v} \|u(t)\|_{L_2(T; \nu(t))} = \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \nu(t) v^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = v\zeta = R, \quad \zeta = \|1\|_{L_2(T; \nu(t))},$$

и если среди функций базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^\infty$ есть такая функция $q(i, t)$, что $|q(i, t)| = c = \text{const}$, где $i < L$ и $c\zeta = 1$, то множество \mathbb{U}_L содержится в замкнутом шаре $\{\mathbf{U} : |\mathbf{U}| \leq R\} \subset \mathbb{R}^L$, имея с ним по крайней мере две общие точки. Иначе множество \mathbb{U}_L содержится в открытом шаре $\{\mathbf{U} : |\mathbf{U}| < R\}$, так как усеченная спектральная характеристика функции $h(t) = v$ будет иметь меньшую норму, чем R . При $\nu(t) \equiv 1$ радиус $R = v\sqrt{t_1 - t_0}$.

Таким образом, множество \mathbb{U}_L — выпуклое, замкнутое, ограниченное подмножество \mathbb{R}^L , симметричное относительно нуля $\mathbf{O} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, соответствующего управлению $u(t) \equiv 0$. Граница множества \mathbb{U}_L является образом управлений, достигающих заданного ограничения v .

4. Аппроксимация множества \mathbb{U}_L многогранной областью

Для приближенного построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания выберем конечное множество управлений, достигающих ограничения v . Их выпуклая комбинация образует замкнутую многогранную область, граница которой — выпуклый многогранник.

Выпуклый многогранник может быть задан множеством вершин и плоскостями граней [17]. Найдем для некоторых классов управлений соответствующие им множества вершин.

Выберем функции $a_i(t) = \alpha_i q(i, t)$, где величины α_i определяются из условия $\max |a_i(t)| = v$, $i = 0, 1, \dots, L-1$. Тогда спектральные характеристики $\mathbf{A}_i = \mathbb{S}[a_i(t)] = \alpha_i \mathbf{E}_i$, где \mathbf{E}_i — орты координатных осей, или столбцы единичной матрицы порядка L . Это является следствием ортогональности функций $\{q(l, t)\}_{l=0,1,\dots,L-1; l \neq i}$ и $a_i(t)$.

Итак, первое приближение для множества \mathbb{U}_L — выпуклая оболочка точек \mathbf{A}_i и симметричных им, т.е. $\mathbb{U}_L^{(1)} = \text{Conv}\{\pm \mathbf{A}_i, i = 0, 1, \dots, L-1\}$, $\mathbb{U}_L^{(1)} \subseteq \mathbb{U}_L$.

Далее рассмотрим функции $a_{j_1 j_2}^\pm(t) = \gamma_{j_1 j_2}^\pm (a_{j_1}(t) \pm a_{j_2}(t))$, где величины $\gamma_{j_1 j_2}^\pm$ определяются из условия $\max |a_{j_1 j_2}^\pm(t)| = v$, $j_1, j_2 = 0, 1, \dots, L-1$, $j_1 \neq j_2$. Нетрудно видеть, что их спектральные характеристики выражаются следующим образом:

$$\mathbf{A}_{j_1 j_2}^\pm = \mathbb{S}[a_{j_1 j_2}^\pm(t)] = \gamma_{j_1 j_2}^\pm (\mathbf{A}_{j_1} \pm \mathbf{A}_{j_2}) = \gamma_{j_1 j_2}^\pm (\alpha_{j_1} \mathbf{E}_{j_1} \pm \alpha_{j_2} \mathbf{E}_{j_2}).$$

Выпуклая оболочка точек, полученных ранее, и точек $\{\pm \mathbf{A}_{j_1 j_2}^\pm, j_1, j_2 = 0, 1, \dots, L-1, j_1 \neq j_2\}$ дает приближение, которое не хуже $\mathbb{U}_L^{(1)}$:

$$\mathbb{U}_L^{(2)} = \text{Conv}\{\{\pm \mathbf{A}_i, i = 0, 1, \dots, L-1\} \cup \{\pm \mathbf{A}_{j_1 j_2}^\pm, j_1, j_2 = 0, 1, \dots, L-1, j_1 \neq j_2\}\},$$

$$\mathbb{U}_L^{(1)} \subseteq \mathbb{U}_L^{(2)} \subseteq \mathbb{U}_L.$$

Для более точной аппроксимации имеет смысл брать в качестве управлений суммы двух и более функций $a_i(t)$ с разными весовыми коэффициентами. Перейдем к общему случаю, для этого введем множество мультииндексов

$$J = J(m, r) = \left\{ (j_0, j_1, \dots, j_{L-1}) : j_i \in \mathbb{Z} \cap [-m, m], \sum_{i=0}^{L-1} |j_i| = r \right\} \quad (3)$$

и функции

$$a_j(t) = \gamma_j \sum_{i=0}^{L-1} j_i a_i(t), \quad j \in J(m, r),$$

где величины γ_j определяются из условия $\max |a_j(t)| = v$, m и r — натуральные числа, $m \leq r \leq Lm$.

Например, множество функций $\mathcal{A}_{1,1} = \{\pm a_j(t), j = 0, 1, \dots, L-1\}$, введенных выше, совпадает с $\{a_j(t), j \in J = J(1, 1)\}$, при этом $\gamma_j = 1$ для всех $j \in J = J(1, 1)$. Множество функций $\mathcal{A}_{1,2} = \{\pm a_{j_1 j_2}^\pm(t), j_1, j_2 = 0, 1, \dots, L-1, j_1 \neq j_2\}$ совпадает с $\{a_j(t), j \in J = J(1, 2)\}$. Объединение $\mathcal{A}_{2,2} = \mathcal{A}_{1,1} \cup \mathcal{A}_{1,2}$ дает $\{a_j(t), j \in J = J(2, 2)\}$. Для общего случая введем обозначение $\mathcal{A}_{m,r} = \{a_j(t), j \in J = J(m, r)\}$.

Множество мультииндексов J необязательно определять в форме (3). Одним из вариантов может быть множество

$$J = J(m) = \left\{ (j_0, j_1, \dots, j_{L-1}) : j_i \in \mathbb{Z} \cap [-m, m], \sum_{i=0}^{L-1} |j_i| \neq 0 \right\}, \quad (4)$$

в котором дополнительно отождествляются пропорциональные индексы, например, в множестве J находится только один из индексов с условием $j_0 = j_1 = \dots = j_{L-1}$, т.е. либо $(1, 1, \dots, 1)$, либо $(-m, -m, \dots, -m)$, поскольку они задают одну и ту же функцию

$a_j(t)$. Фактически здесь вместо множества $J(m)$ нужно рассматривать его факторизацию по отношению эквивалентности: $j^1 \sim j^2$, $j^1, j^2 \in J(m)$, если $j^1 = \chi j^2$, где χ — некоторое ненулевое рациональное число. Отметим, что $J(m, r) \subset J(m)$, и введем обозначение $\mathcal{A}_m = \{a_j(t), j \in J = J(m)\}$. Тогда $\mathcal{A}_{m,r} \subset \mathcal{A}_m$.

Далее найдем спектральные характеристики функций $a_j(t)$, $j \in J$:

$$\mathbf{A}_j = \mathbb{S}[a_j(t)] = \gamma_j [j_0 \alpha_0 \quad j_1 \alpha_1 \quad \dots \quad j_{L-1} \alpha_{L-1}]^T = \gamma_j \sum_{i=0}^{L-1} j_i \alpha_i \mathbf{E}_i,$$

которые образуют множество вершин многогранной области, аппроксимирующей множество \mathbb{U}_L :

$$\mathbb{U}_L^{(m)} = \text{Conv}\{\mathbf{A}_j, j \in J\}, \quad \mathbb{U}_L^{(m)} \subseteq \mathbb{U}_L. \quad (5)$$

Здесь $J = J(m, r)$ (см. (3)) или $J = J(m)$ (см. (4)).

Рассмотрим другой класс функций — функции, порожденные кусочно-постоянными функциями. Выберем натуральное число n : $2^n \geq 2L$, и определим функции

$$b_i(t) = vI(t - t_0 - i\eta/n), \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $I(t)$ — индикатор множества $[0, \eta/n)$, $\eta = t_1 - t_0$.

Далее определим множество мультииндексов

$$K = K(n) = \{(k_0, k_1, \dots, k_{n-1}) : k_i \in \{\pm 1\}\}, \quad (6)$$

а также функции

$$\hat{b}_k(t) = \sum_{i=0}^{n-1} k_i b_i(t), \quad k \in K,$$

и $b_k(t) = \beta_k \hat{b}_k(t)$, где величины β_k определяются из условия $\max |\mathbb{S}^{-1}[\hat{\mathbf{B}}_k]| = v$, в котором $\hat{\mathbf{B}}_k$ — усеченная спектральная характеристика функции $\hat{b}_k(t)$. Индексы k , для которых $\hat{\mathbf{B}}_k$ — нулевой вектор, т.е. функция $\hat{b}_k(t)$ ортогональна первым L функциям базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$, не рассматриваются.

Введение вспомогательных функций $\hat{b}_k(t)$ связано с тем, что если построить проекцию $L_2(T; \nu(t)) \cap \{u(t) : |u(t)| \leq v\}$ на $L_2(T; \nu(t))_L$, то она, вообще говоря, не совпадет с $L_2(T; \nu(t))_L \cap \{u(t) : |u(t)| \leq v\}$, поскольку при обратном преобразовании усеченной спектральной характеристики результат может не удовлетворять исходным ограничениям или не достигать заданного ограничения v . Более того, с ростом n L_2 -норма $b_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, будет уменьшаться, а соответствующие им усеченные спектральные характеристики — приближаться к нулю $\mathbf{0}$ при том, что $\max |b_i(t)| = v$.

Спектральные характеристики функций $b_k(t)$ вычисляются по определению:

$$\mathbf{B}_k = \mathbb{S}[b_k(t)] = \beta_k \sum_{i=0}^{n-1} k_i \mathbb{S}[b_i(t)], \quad k \in K.$$

Они образуют множество вершин многогранной области, аппроксимирующей множество \mathbb{U}_L :

$$\mathbb{U}_L^{(n)} = \text{Conv}\{\mathbf{B}_k, k \in K\}, \quad \mathbb{U}_L^{(n)} \subseteq \mathbb{U}_L, \quad (7)$$

где $K = K(n)$ (см. (6)).

Функции $\mathcal{B}_n = \{b_k(t), k \in K = K(n)\}$, в общем случае уже не являются кусочно-постоянными и не ортогональны при непересекающихся носителях ($b_i(t)$ таким свойством обладают, $i = 0, 1, \dots, n-1$), поэтому они не так удобны, как введенные ранее функции $a_j(t)$, $j \in J$, вычисление их спектральных характеристик более трудоемко. Тем не менее, их тоже можно использовать для построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания. Можно даже указать базисную систему функций Уолша, для которой оба подхода могут давать одно и то же приближение множества \mathbb{U}_L при соответствующем выборе параметров m, r, n : $m = r$ и $n = 2^s$, где $s \in \mathbb{N}$.

Для построения множества вершин многогранной области возможно и объединение $\{\mathbf{A}_j, j \in J\}$ и $\{\mathbf{B}_k, k \in K\}$:

$$\mathbb{U}_L^{(m,n)} = \text{Conv}\{\{\mathbf{A}_j, j \in J\} \cup \{\mathbf{B}_k, k \in K\}\}, \quad \mathbb{U}_L^{(m,n)} \subseteq \mathbb{U}_L,$$

где $J = J(m, r)$ или $J = J(m)$, $K = K(n)$, а также добавление к ним вершин, полученных другим способом, в том числе и на основе моделирования случайных функций из $L_2(T; \nu(t))_L \cap \{u(t) : \max |u(t)| = v\}$.

Выпуклую многогранную область можно построить как пересечение полупространств, заданных граничными плоскостями. Построение плоскостей граней по известному множеству вершин многогранника может осуществляться методами вычислительной геометрии [18].

Уравнение гиперплоскости в \mathbb{R}^L , проходящей через вершины $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{L-1} \in \mathbb{R}^L$, задается в виде

$$\det(\mathbf{X} - \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_0, \dots, \mathbf{U}_{L-1} - \mathbf{U}_0) = 0,$$

где $\mathbf{X} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{L-1}]^T \in \mathbb{R}^L$. Чтобы гиперплоскость была граничной, очевидно, остальные точки, являющиеся вершинами многогранника, и нуль, должны быть по одну сторону этой гиперплоскости. Раскрывая определитель, уравнение гиперплоскости можно переписать следующим образом:

$$n_0 x_0 + n_1 x_1 + \dots + n_{L-1} x_{L-1} - d = 0, \quad (8)$$

где $d > 0$, тогда $\mathbf{N} = [n_0 \ n_1 \ \dots \ n_{L-1}]^T$ — внешняя нормаль к гиперплоскости [17]. Все точки \mathbf{X} , для которых $(\mathbf{N}, \mathbf{X}) - d = n_0 x_0 + n_1 x_1 + \dots + n_{L-1} x_{L-1} - d < 0$, лежат в полупространстве, содержащем нуль.

Заметим, что если $\det(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_0, \dots, \mathbf{U}_{L-1} - \mathbf{U}_0) = 0$, то либо гиперплоскость проходит через нуль, либо $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{L-1}$ линейно зависимы и не могут задавать граничную гиперплоскость.

Таким образом, можно перейти от задания выпуклого многогранника множеством вершин к заданию его плоскостями граней P^l , где l принимает значения из конечного множества. Каждая из этих плоскостей определяется внешней нормалью \mathbf{N}^l и числом d^l , т.е. уравнением $(\mathbf{N}^l, \mathbf{X}) - d^l = 0$. Тогда проверка принадлежности точки $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^L$, которая соответствует некоторому управлению $u(t) = \mathbb{S}^{-1}[\mathbf{U}]$, сводится к проверке условия $(\mathbf{N}^l, \mathbf{U}) - d^l \leq 0$ для каждого l .

5. Изменение масштаба и сдвиг

Пусть \mathbb{V}_L — множество допустимых управлений в спектральной форме математического описания при условии, что $T = [0, 1]$ и $v = 1$, т.е. \mathbb{V}_L — образ множества

$L_2([0, 1]; \rho(t))_L \cap \{v(t): |v(t)| \leq 1\}$ при спектральном преобразовании \mathbb{S} , $\rho(t)$ — весовая функция.

Построим образ \mathbb{U}_L множества $L_2([t_0, t_1]; \nu(t))_L \cap \{u(t): |u(t)| \leq v\}$. Установим взаимно однозначное соответствие управлений $u(t)$ и $v(t)$, а также построим ортонормированный базис $\{q(i, t)\}_{i=0}^\infty$ в $L_2([t_0, t_1]; \nu(t))$ на основе базиса $\{p(i, t)\}_{i=0}^\infty$ в $L_2([0, 1]; \rho(t))$:

$$u(t) = v \nu \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right), \quad q(i, t) = \frac{1}{\sqrt{t_1 - t_0}} p \left(i, \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right), \quad \nu(t) = \rho \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right).$$

Тогда связь коэффициентов разложения управлений $u(t)$ и $v(t)$ задается соотношением

$$\begin{aligned} u_i &= (q(i, t), u(t))_{L_2(T; \nu(t))} = \int_{t_0}^{t_1} \nu(t) q(i, t) u(t) dt = \\ &= \frac{v}{\sqrt{t_1 - t_0}} \int_{t_0}^{t_1} \rho \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right) p \left(i, \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right) v \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right) dt = \\ &= v \sqrt{t_1 - t_0} \int_0^1 \rho(\tau) p(i, \tau) v(\tau) d\tau = v \sqrt{t_1 - t_0} v_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

и, следовательно, спектральные характеристики этих управлений связаны следующим образом:

$$\mathbb{S}_q[u(t)] = v \sqrt{t_1 - t_0} \mathbb{S}_p[v(t)],$$

где при спектральном преобразовании используются разные базисные системы, что и отражено в обозначениях.

Таким образом, зная множество \mathbb{V}_L , нетрудно получить и \mathbb{U}_L , используя преобразование подобия (гомотетию) с коэффициентом $v \sqrt{t_1 - t_0}$. Множество допустимых управлений \mathbb{V}_L в спектральной форме математического описания не изменяется при преобразованиях, для которых $v \sqrt{t_1 - t_0} = 1$. Множество \mathbb{U}_L является образом целого класса $L_2([t_0, t_1]; \nu(t))_L \cap \{u(t): |u(t)| \leq v\}$, определяемого равенством $v \sqrt{t_1 - t_0} = \text{const}$.

Далее рассмотрим множество допустимых управлений, определяемых ограничением вида $v_0 \leq u(t) \leq v_1$. Вводя новое управление $w(t) = u(t) - \bar{u}$, $\bar{u} = (v_0 + v_1)/2$, получаем ограничение $|w(t)| \leq \omega$, где $\omega = (v_1 - v_0)/2$. Обозначим соответствующее ему множество допустимых управлений в спектральной форме математического описания через \mathbb{W}_L , а спектральную характеристику функции $\bar{u}(t) = \bar{u} = \text{const}$ через $\bar{\mathbf{U}}$.

Поскольку спектральное преобразование линейно, спектральные характеристики \mathbf{W} и \mathbf{U} управлений $w(t)$ и $u(t)$ связаны соотношением $\mathbf{W} = \mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}$. Если принять, что функция $q(0, t)$ базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^\infty$ принимает постоянное значение: $q(0, t) = c = \text{const}$ (для наиболее часто применяемых базисов это так), то $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{u}/c) \mathbf{E}_0$ и множество \mathbb{U}_L можно получить из \mathbb{W}_L с помощью движения вдоль орта \mathbf{E}_0 . В общем же случае движение происходит вдоль вектора $\bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^L$, не коллинеарного с \mathbf{E}_0 .

Следовательно, для нахождения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания, соответствующего ограничению $v_0 \leq u(t) \leq v_1$ при $t \in T = [t_0, t_1]$, достаточно найти множество \mathbb{V}_L , которое является образом множества $L_2([0, 1]; \rho(t))_L \cap \{v(t): |v(t)| \leq 1\}$ при спектральном преобразовании \mathbb{S} , для каждой из применяемых базисных систем.

6. Примеры

Приведем примеры нахождения множеств \mathbb{V}_L допустимых управлений в спектральной форме математического описания (при $T = [0, 1]$ и $\nu = 1$) для полиномов Лежандра, тригонометрических функций (косинусоид) и функций Уолша. Для всех перечисленных базисных систем весовая функция $\nu(t)$ тождественно равна единице.

На рис. 1 показаны проекции граничных точек множеств допустимых управлений при усечении $L = 3$ на координатные плоскости при использовании многогранной области $\mathbb{U}_L^{(8)}$, $J = J(8, 8)$ (см. (3), (5)) — всего 258 граничных точек. Первая строка на рис. 1 соответствует полиномам Лежандра (78 граней), вторая строка — косинусоидам (78 граней), третья строка — функциям Уолша (8 граней). Для первого столбца координаты спектральных характеристик с номерами 0 и 1 соответственно по оси абсцисс и оси ординат, для второго столбца — 0 и 2, для третьего столбца — 1 и 2. Знаком \blacklozenge — обозначены граничные точки, принадлежащие соответствующей координатной плоскости в \mathbb{R}^3 , а знаком \diamond — проекции остальных граничных точек. Чтобы минимизировать влияние погрешностей при вычислениях, плоскости граней с нормальными, кубическая норма разности между которыми не превосходит $\varepsilon = 10^{-8}$, отождествляются. При другом ε число граней может в общем случае отличаться от приведенных выше значений.

Использование многогранной области $\mathbb{U}_L^{(8)}$, $J = J(8)$ дает существенно больше вершин, усложняя при этом нахождение граней, а построение многогранной области $\mathbb{U}_L^{(8)}$, $K = K(8)$ (см. (6)) не обеспечивает такого «равномерного распределения» вершин. На рис. 2 изображены иллюстрации к последнему случаю, их расположение соответствует рис. 1.

Рассмотрим более подробно систему функций Уолша [8, 11, 16]. На отрезке $T = [0, 1]$ они определяются следующим образом:

$$\hat{\Omega}(i, t) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \prod_{\{k: \gamma_k=1\}} r(k, t), & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где γ_k — коэффициенты в двоичном представлении числа $i = \gamma_1 2^0 + \gamma_2 2^1 + \gamma_3 2^2 + \dots + \gamma_k 2^{k-1} + \dots + \gamma_{m+1} 2^m$, m — наибольшая степень в этом двоичном представлении, $\gamma_k \in \{0, 1\}$, а $r(k, t)$ — функции Радемахера:

$$r(k, t) = \text{sign}(\sin(2^k \pi t)) = \begin{cases} 1, & \sin(2^k \pi t) \geq 0, \\ -1, & \sin(2^k \pi t) < 0, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Функция Уолша $\hat{\Omega}(i, t)$ представляет собой произведение функций $r(k, t)$ с номерами k , для которых $\gamma_k = 1$ в двоичном представлении числа i , поэтому

$$\max |\Omega(i, t)| = 1, \quad i = 0, 1, \dots, L - 1,$$

т.е. $a_i(t) = \Omega(i, t)$ и $\mathbf{A}_i = \mathbb{S}[a_i(t)] = \mathbf{E}_i$.

Далее заметим, что функции Уолша строятся таким образом [16], что для совокупности $\hat{\Omega}(i, t)$, $i = 1, 2, \dots, L - 1$, найдется интервал $\Theta \subset T$, на котором эти функции принимают заданные значения ω_i соответственно из множества $\{\pm 1\}$, например, $\hat{\Omega}(i, t^*) = 1$, $\hat{\Omega}(i, t^*) = -1$ или $\hat{\Omega}(i, t^*) = (-1)^i$, $t^* \in \Theta$. Исходя из этого, для любой комбинации

$$\max \left| \sum_{i=1}^{L-1} \alpha_i \hat{\Omega}(i, t) \right| = 1, \quad \sum_{i=1}^{L-1} |\alpha_i| = 1,$$

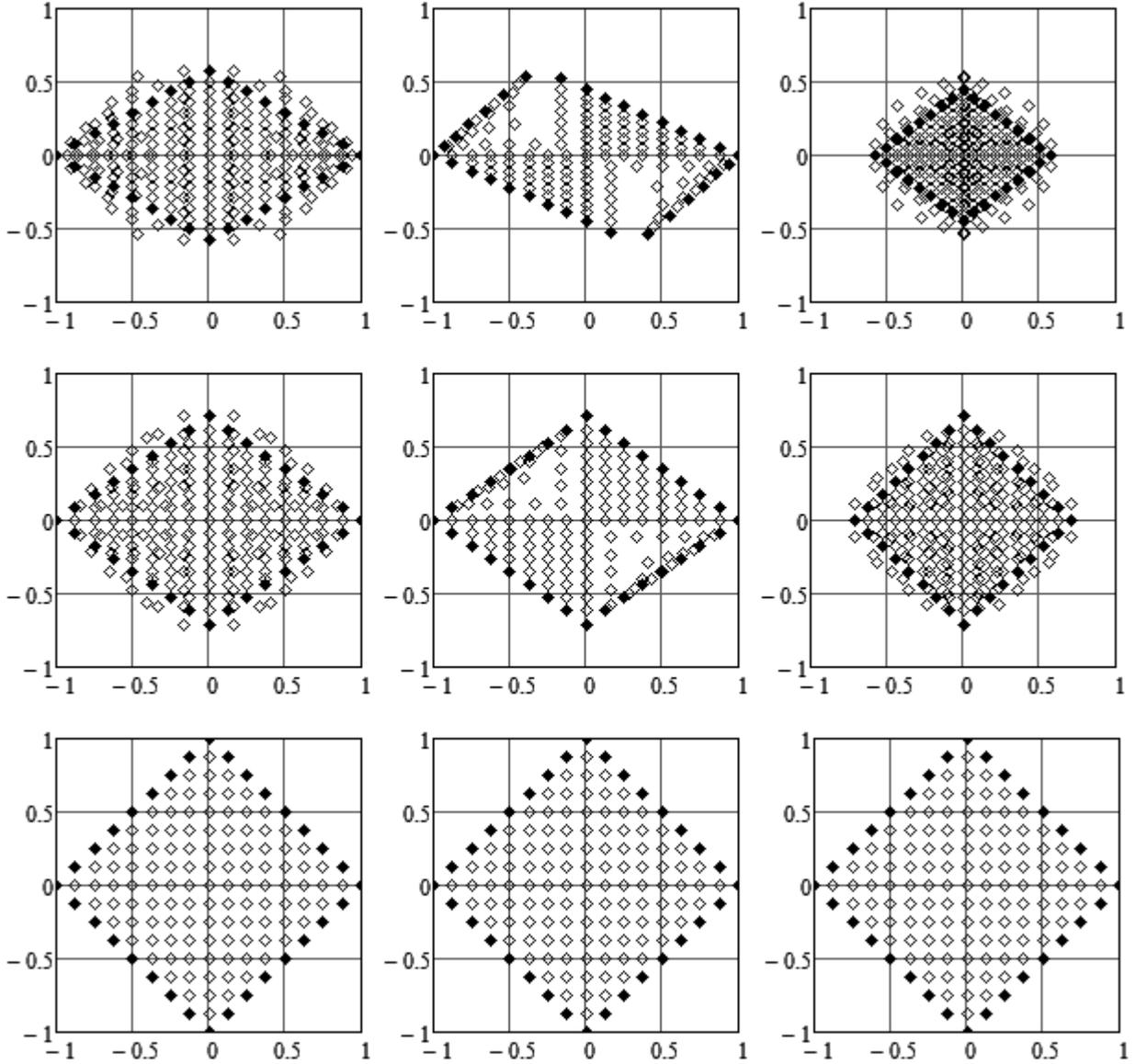


Рис. 1. Проекция множеств допустимых управлений на координатные плоскости для различных базисных систем; $\mathbb{U}_L^{(8)}$, $J = J(8, 8)$.

так как найдется такое $t^* \in \Theta$, что $\Omega(i, t^*) = \text{sign } \alpha_i$. Этот вывод останется справедливым, если добавить функцию $\hat{\Omega}(0, t)$, тождественно равную единице на T . В этом случае

$$\max \left| \sum_{i=0}^{L-1} \alpha_i \hat{\Omega}(i, t) \right| = 1, \quad \alpha_0 + \sum_{i=1}^{L-1} |\alpha_i| = 1, \quad \alpha_0 \geq 0. \quad (9)$$

Здесь переход к $\alpha_0 < 0$ влечет смену знака всех α_i , $i = 1, 2, \dots, L-1$.

Следовательно, множество допустимых управлений \mathbb{V}_L в спектральной форме математического описания совпадает с первым приближением $\mathbb{V}_L^{(m)}$ при $m = 1$: $\mathbb{V}_L^{(1)} = \text{Conv}\{\pm \mathbf{E}_i, i = 0, 1, \dots, L-1\}$, $\mathbb{V}_L^{(1)} = \mathbb{V}_L$, и представляет собой правильный кроссполитоп в \mathbb{R}^L — L -мерный октаэдр, или кокуб.

Возьмем L точек $\mathbf{X}_i = [x_{i,0} \ x_{i,1} \ \dots \ x_{i,L-1}]^T$ из множества $\{\pm \mathbf{E}_i, i = 0, 1, \dots, L-1\}$: $\mathbf{X}_i = \omega_i \mathbf{E}_i$, где $\omega_i = 1$ или $\omega_i = -1$. Тогда, подставляя значения $x_{ik} = \omega_i \delta_{ik}$ в уравне-

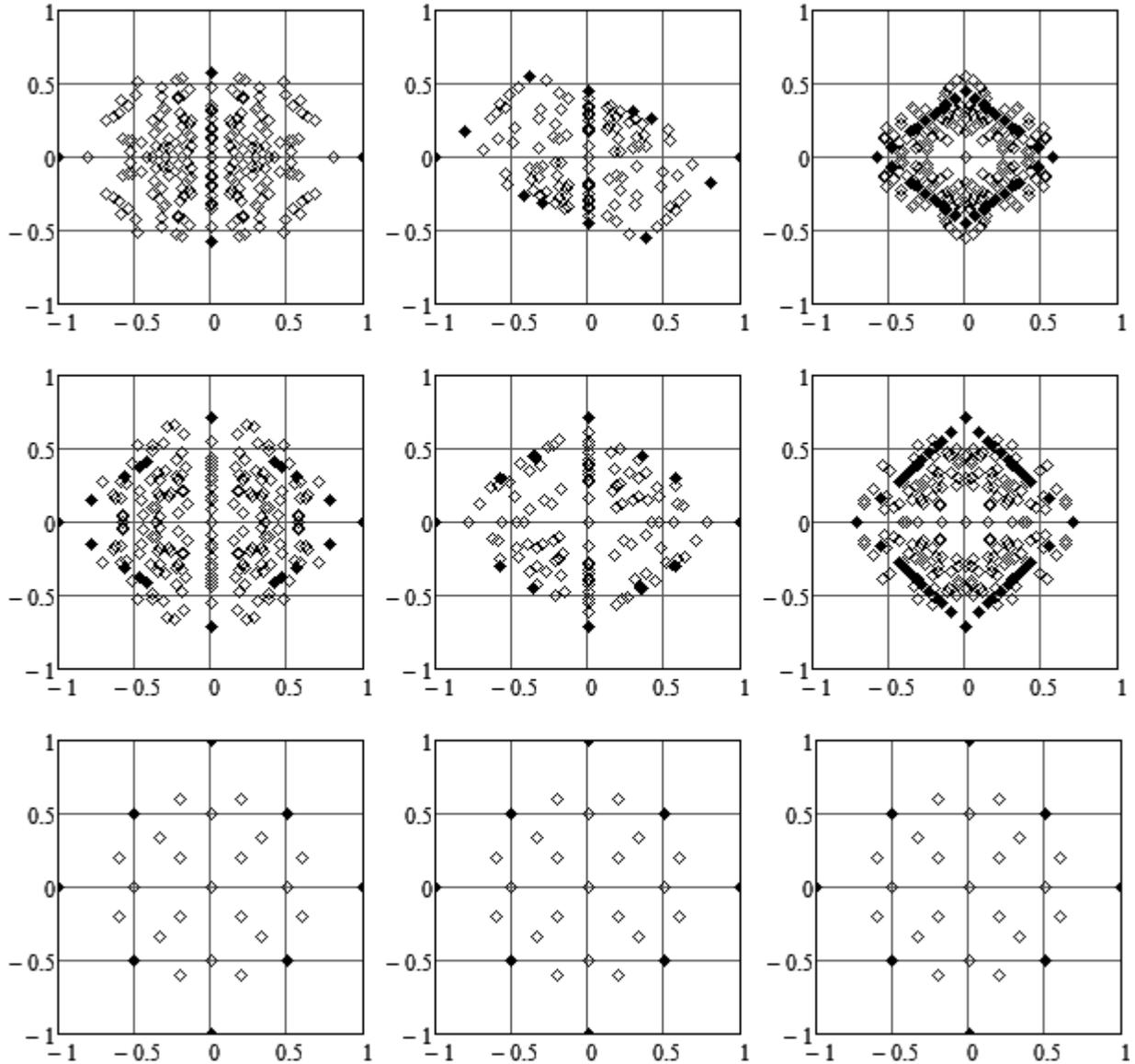


Рис. 2. Проекция множеств допустимых управлений на координатные плоскости для различных базисных систем; $\mathcal{U}_L^{(8)}$, $K = K(8)$.

ние (8), $i = 0, 1, \dots, L - 1$, где δ_{ik} — символ Кронекера, и полагая $d = 1$, получаем систему линейных уравнений относительно координат n_k вектора внешней нормали \mathbf{N} к гиперплоскости, проходящей через точки $\mathbf{X}_i, i = 0, 1, \dots, L - 1$. Ее решение: $n_k = \omega_k$, т.е. $\mathbf{N} = [\omega_0 \ \omega_1 \ \dots \ \omega_{L-1}]^T$.

Множество всех таких комбинаций \mathbf{X}_i порождает всевозможные векторы \mathbf{N}^l для $d^l = 1, l = 0, 1, \dots, 2^L - 1$, координаты которых принимают значения из множества $\{\pm 1\}$. Таким образом, для функций Уолша множество допустимых управлений в спектральной форме математического описания — правильный кроссполитоп, который можно задать плоскостями граней P^l с векторами внешних нормалей \mathbf{N}^l , определяемыми, например, двоичным разложением числа l (координата n_k^l вектора \mathbf{N}^l принимает значение -1 или 1 в зависимости от коэффициента 0 или 1 при 2^k в двоичном представлении числа $l, k = 0, 1, \dots, L - 1$), и значениями $d^l = 1$.

Далее рассмотрим условие принадлежности усеченной спектральной характеристики \mathbf{U} множеству \mathbb{V}_L :

$$(\mathbf{N}^l, \mathbf{U}) - 1 \leq 0, \quad l = 0, 1, \dots, 2^L - 1,$$

где координаты n_k^l внешних нормалей \mathbf{N}^l принимают значения из множества $\{\pm 1\}$. Но это условие эквивалентно условию $\|\mathbf{U}\|_\diamond = |u_0| + |u_1| + \dots + |u_{L-1}| \leq 1$, поскольку $\max_l (\mathbf{N}^l, \mathbf{U}) = \|\mathbf{U}\|_\diamond$ (см. также выражение (9)).

Таким образом, для функций Уолша, ортонормированных на отрезке $T = [0, 1]$, множество допустимых управлений в спектральной форме математического описания задается векторами с октаэдрической нормой, не превосходящей единицы:

$$u(t) \in L_2([0, 1])_L \cap \{u(t): |u(t)| \leq 1\} \iff \mathbf{U} = \mathbb{S}[u(t)] \in \mathbb{V}_L = \{\mathbf{U}: \|\mathbf{U}\|_\diamond \leq 1\}.$$

Для общего случая, т.е. при $T = [t_0, t_1]$ и ограничением на управление $|u(t)| \leq v$, с учетом масштабирующего коэффициента имеем

$$u(t) \in L_2(T)_L \cap \{u(t): |u(t)| \leq v\} \iff \mathbf{U} = \mathbb{S}[u(t)] \in \mathbb{U}_L = \{\mathbf{U}: \|\mathbf{U}\|_\diamond \leq v\sqrt{t_1 - t_0}\}.$$

В качестве примера нахождения оптимального управления рассмотрим следующую задачу [19]. Пусть модель управления задается уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad (10)$$

при ограничениях $|u(t)| \leq 1$ и начальных условиях $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Функционал качества управления:

$$I = x_2(2\pi) \rightarrow \min_{x_1(\cdot), x_2(\cdot); u(\cdot): |u(t)| \leq 1}.$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(t)$ и соответствующие ему траектории $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$.

Будем решать эту задачу в базисе функций Уолша, заданных на отрезке $[0, 2\pi]$, с порядком усечения L :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbb{S}[x_1(t)], \quad \mathbf{X}_2 = \mathbb{S}[x_2(t)], \quad \mathbf{U} = \mathbb{S}[u(t)], \quad \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^L.$$

Спектральный аналог уравнений (10), задающих модель управления:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_2 = -\mathbf{X}_1 + \mathbf{U}, \quad (11)$$

так как

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_1 = \mathbb{S}[\dot{x}_1(t)|_{x_1(0)=0}], \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbb{S}[\dot{x}_2(t)|_{x_2(0)=0}],$$

где \mathbf{P} — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального условия — матрица размеров $L \times L$, элементы которой рассчитываются согласно [8].

Функционал качества управления преобразуется к виду

$$\hat{I} = \hat{\mathbf{\Omega}}(2\pi) \cdot \mathbf{X}_2 \rightarrow \min_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{U}: \|\mathbf{U}\|_\diamond \leq \sqrt{2\pi}}, \quad (12)$$

где $\hat{\mathbf{\Omega}}(2\pi)$ — матрица-строка значений функций Уолша $\hat{\Omega}(i, t)$ при $t = 2\pi$ и $i = 0, 1, \dots, L - 1$ — усеченная спектральная характеристика линейного функционала, ставящего в соответствие функции ее значение в точке 2π [10].

Таким образом, задача сводится к конечномерной задаче минимизации (11) и (12). При $L = 16$ эта задача решалась мультистартовым адаптивным методом случайного поиска при нулевом начальном приближении для управления ($\mathbf{U} = \mathbf{O}$ — нулевой вектор), ограничения учитывались с помощью добавления штрафного слагаемого в (12). Наилучший результат (из 15) был достигнут при 518 итерациях, минимальной величине шага $\varepsilon = 10^{-9}$ и стандартных параметрах метода (см. [5]), минимальное значение функционала $\min I \approx -2.227744$. Полученное решение для оптимального управления хорошо согласуется с точным решением $u^*(t) = -\text{sign}(\cos t)$ — отклонение значений управления составляет 0.000239 (см. рис. 3), однако результаты для функций $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$ в сравнении с точным решением

$$x_1^*(t) = \begin{cases} \cos t - 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \cos t - 2 \sin t + 1, & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2}, \\ \cos t - 4 \sin t - 1, & \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi, \end{cases} \quad x_2^*(t) = \begin{cases} -\sin t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ -\sin t - 2 \cos t, & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2}, \\ -\sin t - 4 \cos t, & \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi, \end{cases}$$

оказались неудовлетворительными, поэтому были проведены расчеты с усечениями 32, 64, 128, 256, 512 и 1024 с управлением, соответствующим расчету для порядка усечения $L = 16$. На рис. 4 показаны графики функций $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$ для порядков усечения $L = 16, 32, 64, \dots, 1024$, найденные спектральным методом. С ростом порядка усечения L увеличивается «детализация» графиков, приближенное решение стремится к точному, которое показано точками. Минимальное значение функционала при $L = 32$ — $\min I \approx -2.943025$, $L = 64$ — $\min I \approx -3.425103$, $L = 128$ — $\min I \approx -3.700894$, $L = 256$ — $\min I \approx -3.847231$, $L = 512$ — $\min I \approx -3.917713$, $L = 1024$ — $\min I \approx -3.960476$, точное значение — $\min I = x_2^*(2\pi) = -4$.

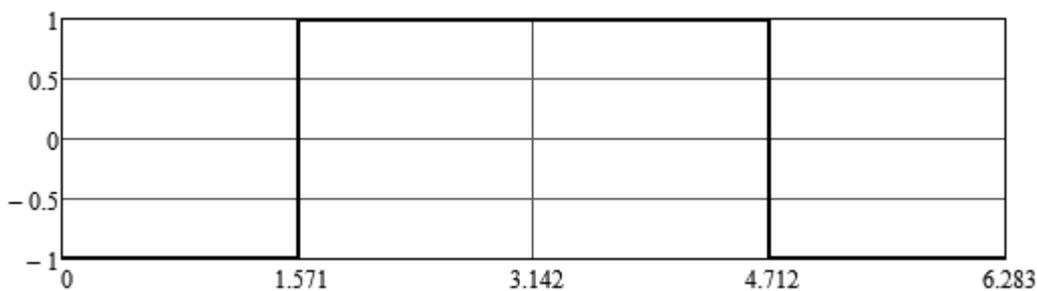


Рис. 3. График оптимального управления $u^*(t)$, найденного спектральным методом.

7. Заключение

В статье представлена методика построения спектрального аналога множества допустимых скалярных управлений с геометрическими ограничениями. Приведены примеры построения таких множеств с использованием полиномов Лежандра, тригонометрических функций и функций Уолша, причем для функций Уолша получено точное описание этого множества. Показано, что для каждой базисной системы достаточно рассмотреть случай, когда промежуток времени $T = [0, 1]$ и ограничение на управление $|u(t)| \leq 1$. Отметим, что применение операции замены базисной системы вряд ли оправдано, поскольку это невырожденное линейное преобразование — композиция поворотов,

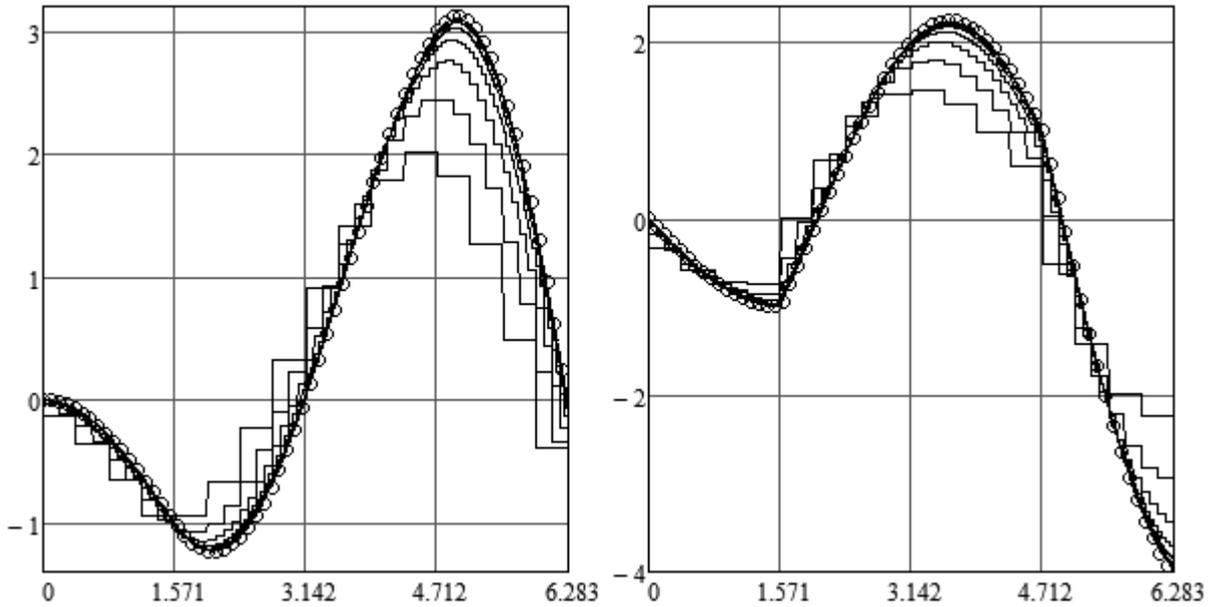


Рис. 4. Графики функций $x_1^*(t)$ (слева) и $x_2^*(t)$ (справа).

растяжений или сжатий, а также отражений. Оно сохраняет количество вершин и плоскостей граней для многогранной области. Например, если взять за основу правильный кроссполитоп для функций Уолша и заменить эту базисную систему на систему полиномов Лежандра или тригонометрических функций, то не получится приемлемая аппроксимация множества допустимых управлений, что видно из приведенного примера.

С ростом порядка усечения L спектральных характеристик и ростом параметров m или n при построении выпуклых многогранников $\mathbb{U}_L^{(m)}$ или $\mathbb{U}_L^{(n)}$ соответственно (см. (5), (7)) существенно возрастает объем вычислений. Даже для первого приближения множества \mathbb{U}_L кроссполитопом $\mathbb{U}_L^{(m)}$ при $m = 1$ требуется построить 2^L плоскостей граней, для последующих приближений число граней только возрастает, что хорошо видно в приведенном выше примере. Поэтому предложенная методика применима для небольших значений параметров L , m и n за исключением базисных систем, для которых удастся построить точное описание искомого множества. С ростом L , видимо, необходимо использовать другие подходы для аппроксимации множества допустимых управлений, возможно, применяя метод эллипсоидов [20] или какое-либо другое подходящее приближение.

В то же время эта методика без изменений может применяться при неограниченном промежутке времени $T = [t_0, +\infty)$, для построения множества допустимых векторных управлений в спектральной форме математического описания при допустимой области значений управлений, ограниченных параллелотопом. С незначительными дополнениями при допустимой области значений векторных управлений, ограниченных эллипсоидом, при нестационарных ограничениях на управление.

Список литературы / References

- [1] Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. —

424 с.

Moiseev N.N. Numerical methods in the theory of optimal systems. M.: Nauka Publishers, 1971. (Перевод автора статьи)

- [2] **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. — 448 с.

Fedorenko R.P. Approximate solution of optimal control problems. M.: Nauka Publishers, 1978. (Перевод автора статьи)

- [3] **Горнов А.Ю.** Алгоритмы решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 2. С. 24–30.

Gornov A.Y. Algorithms for solving optimal control problems with phase restrictions // Computational technologies. 2010. V. 15, № 2. P. 24–30. (in Russ.)

- [4] **Гурман В.И., Расина И.В., Блинов А.О.** Эволюция и перспективы приближенных методов оптимального управления // Программные системы: теория и приложения. 2011. Т. 2, № 2. С. 11–29.

Gurman V.I., Rasina I.V., Blinov A.O. Evolution and prospects of approximate methods of optimal control // Program systems: Theory and applications. 2011. Vol. 2, № 2. P. 11–29. (in Russ.)

- [5] **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.** Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 2012. — 160 с.

Panteleev A.V., Rybakov K.A. Methods and algorithms for synthesis of optimal stochastic control systems with incomplete information. M.: MAI Press, 2012. (Перевод автора статьи)

- [6] **Пантелеев А.В.** Применение эволюционных методов глобальной оптимизации в задачах оптимального управления детерминированными системами. М.: Изд-во МАИ, 2013. — 160 с.

Panteleev A.V. Application of evolutionary global optimization methods for optimal control of deterministic systems. M.: MAI Press, 2013. (Перевод автора статьи)

- [7] **Солодовников В.В., Семенов В.В.** Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974. — 336 с.

Solodovnikov V.V., Semenov V.V. Spectral theory of nonstationary control systems. M.: Nauka Publishers, 1974. (Перевод автора статьи)

- [8] **Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д.** Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. М.: Машиностроение, 1979. — 664 с.

Solodovnikov V.V., Semenov V.V., Peshel' M., Nedo D. Design of control systems on digital computers: spectral and interpolational methods. M.: Mashinostroenie, 1979. (Перевод автора статьи)

- [9] **Лапин С.В., Егупов Н.Д.** Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. — 496 с.

Lapin S.V., Egupov N.D. The theory of matrix operators and its application to problems of automatic control. M.: VMSTU Press, 1997. (Перевод автора статьи)

- [10] **Рыбаков К.А.** Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Труды МАИ. 2005. № 18.

Rybakov K.A. Spectral characteristics of linear functionals and their applications to stochastic control systems analysis and synthesis // MAI Proceedings. 2005. № 18. (in Russ.)

- [11] **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.** Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. — 160 с.
Panteleev A.V., Rybakov K.A. Applied probabilistic analysis of nonlinear control systems by spectral method. M.: MAI Press, 2010. (Перевод автора статьи)
- [12] **Рыбин В.В.** Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. М.: Изд-во МАИ, 2011. — 220 с.
Rybin V.V. Modeling of nonstationary continuous-discrete control systems by spectral method on computers. M.: MAI Press, 2011. (Перевод автора статьи)
- [13] **Рыбаков К.А.** Многопараметрические базисные системы для представления функций в неограниченных областях // Научный вестник МГТУ ГА. 2013. № 195 (9). С. 45–50.
Rybakov K.A. Multiparameter basis to represent functions in unbounded domains // Scientific bulletin of MSTUCA. 2013. № 195 (9). P. 45–50. (in Russ.)
- [14] **Рыбин В.В.** Моделирование нестационарных систем управления целого и дробного порядка проекционно-сеточным спектральным методом. М.: Изд-во МАИ, 2013. — 160 с.
Rybin V.V. Modeling of nonstationary integer-order and fractional-order control systems by grid-projection spectral method. M.: MAI Press, 2013. (Перевод автора статьи)
- [15] **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. — 542 с.
Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Dover, 1999. — 288 p.
- [16] **Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.** Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987. — 344 с.
Golubov B., Efimov A., Skvortsov V. Walsh series and transforms: Theory and applications. Kluwer Academic Publishers, 1991. — 368 p.
- [17] **Александров А.Д.** Выпуклые многогранники. М.: ГИТТЛ, 1950. — 428 с.
Alexandrov A.D. Convex polyhedra. Berlin: Springer, 2005. — 452 p.
- [18] **Препарата Ф., Шеймос М.** Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989. — 478 с.
Preparata F.P., Shamos M. Computational Geometry: An Introduction. New York: Springer, 1985. — 404 p.
- [19] **Пантелеев А.В., Бортакoвский А.С.** Теория управления в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2003. — 583 с.
Panteleev A.V., Bortakovskiy A.S. The control theory: Examples and problems. M.: Higher School, 2003. (Перевод автора статьи)
- [20] **Черноуcько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. — 320 с.
Chernousko F.L. Evaluation of the phase state of dynamic systems. Ellipsoid method. M.: Nauka Publishers, 1988. (Перевод автора статьи)