<u>*Расчетно-графическая работа (РГР)*</u>

“Математический анализ”, “Теория функций комплексного переменного”

<u>1 факультет, 2 курс, 2 семестр, Молодожникова Р.Н.</u>

1. Записать в алгебраической форме комплексное число.
2. Решить уравнение.
3. Найти образ множества при отражении $w = f(z)$.
4. Восстановить аналитическую функцию
5. Разложить в ряд Лорана (все разложения).
6.
   а) Вычислить контурный интеграл с помощью вычетов.
   б) Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.
7. Решить уравнение операционным методом.

Вариант №1

1. $2^{i-1}, \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$.
2. $\operatorname{sh} z = i$.
3. Образ полярной сетки внутри $|z|<1$ при $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.
4. $u = x^2 - y^2 + xy, w(0)=0$.
5. $f(z)=\frac{z}{z^2+z-2}$ по степеням $z+3$.
6.
   a) $\oint\limits_C \frac{e^z dz}{z^2(z+1)}, C:|z|=2$.
   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.
7. $y'' - 2y' - 3y = 2t, y(0)=1, y'(0)=1$.

Вариант №2

1. $(1+i)^i$, $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3}i-1\right)$.
2. $z^4+1-i=0$.
3. Образ полярной сетки вне $|z|=1$ при $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.
4. $v=\frac{y}{x^2+y^2}, w(2)=0$.
5. $f(z)=\frac{z}{2+z-z^2}$ по степеням $z-3$.
6.
   a) $\oint\limits_C \frac{\sin z dz}{(z^2-1)(z^2-4)}, C:|z-2|=2$.
   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.
7. $y''' + y' = \cos t, y(0)=1, y'(0)=y''(0)=0$.

Вариант №3

1. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2i\right), (-1)^{4i}$.
2. $z^5=1-i$.
3. Образ ортогональной сетки при $w=e^z$.
4. $u=x^2-y^2+x^2, f(0)=0$.
5. $\frac{z-2}{2z^3+z^2-z}$.
6.
   a) $\oint\limits_C \frac{(z^2+1)dz}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}, C:|z-1|=2$.
   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+25)(9x^2+1)}$.
7. $y''-2y'-3y=2t, y(0)=y'(0)=1$.

Вариант №4

1. $\operatorname{sh}\left(2+\frac{\pi i}{4}\right), i^{3i}$.
2. $z^n=\sqrt{3}-i$.
3. Образ ортогональной сетки при $w=\cos z$.
4. $u=x^3-3xy+1, f(0)=1$.
5. $\frac{z+1}{z(z-1)}$ по степеням $z-1-2i$.
6.
   a) $\oint\limits_C \frac{(z^2+\sin z+2)dz}{z^2+\pi z}, C:|z|=2$.
   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.
7. $2y''+3y'+y=3e^t, y(0)=0, y'(0)=1$.

Вариант №5

1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+2i\right), 1^{2i}$.
2. $z^4=-8+8\sqrt{3}i$.
3. Образ полярной сетки при $w=\ln z$.
4. $u=\frac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y, f(0)=2$.
5. $\frac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$.
6.
   a) $\oint\limits_C \frac{2dz}{z^2(z-1)}, C:|z-1-i|=\frac{5}{4}$.

   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2-x+2)dx}{x^4+10x^2+9}$.
7. $y''-y=\cos 3t, y(0)=y'(0)=1$.

Вариант №6

1. $\operatorname{ch}\left(2+\frac{\pi i}{6}\right), \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$.
2. $z^2+i=0$.
3. Образ полуполосы $-\pi<x<\pi, 0<y<+\infty$ при $w=\sin z$.
4. $u=\frac{x}{x^2+y^2}, f(1)=1+i$.
5. $\frac{z+1}{z(z-1)}$ по степеням $z-2-3i$.
6.
   a) $\oint\limits_C \frac{z(\sin z+2)dz}{\sin z}, C:\left|z-\frac{3}{2}\right|=2$.

   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)dx}{(x^2+4)^2}$.
7. $y''+y'+y=7e^{2t}, y(0)=1, y'(0)=4$.

Вариант №7

1. $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right)$, $\arcsin 4$.
2. $z^4+16=0$.
3. Образ полярной сетки при $w=z^2$ и $\mathrm{Im}\, z>0$.
4. $u=e^x\left(y\cos y+x\sin y\right), f\left(0\right)=0$.
5. $\dfrac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$.
6.
   a) $\oint\limits_C \dfrac{\left(\sin^2 z-3\right)dz}{z^2+2\pi z}, C:\left|z+1\right|=2$.
   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{\left(x^4+1\right)^2}$.
7. $y''-y'=t^2, y\left(0\right)=0, y'\left(0\right)=1$.

Вариант №8

1. $\mathrm{Ln}\left(1+\sqrt{3}i\right)$, $\left(-i\right)^{5i}$.
2. $\sin z=2$.
3. Образ прямоугольной сетки при $w=z^2$ и $\mathrm{Im}\, z>0$.
4. $u=x^2-y^2-2y, f\left(0\right)=0$.
5. $\dfrac{z+3}{z^2-1}$ по степеням $z-2-i$.
6.
   a) $\oint\limits_C \dfrac{\left(z^2+z+3\right)dz}{\sin z\left(\pi+z\right)}, C:\left|z\right|=\dfrac{\pi}{2}$.
   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{\left(x^2-10x+29\right)^2}$.
7. $y''+y'=t^2+2t, y\left(0\right)=0, y'\left(0\right)=-2$.

Вариант №9

1. $\operatorname{ch}(1-\pi i),\ (-1-i)^{4i}$.

2. $z^4-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=0$.

3. Образ линии $x^2+y^2-2x=0$ при $w=3z+i$ (обход против часовой стрелки).

4. $v=e^{-y}\sin x+y, f(0)=1$.

5. $\frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$.

6.

   a) $\oint\limits_C \frac{\ln(e+z)dz}{z\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}, C:|z|=\frac{1}{4}$.

   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\left(x^2+11\right)^2}$.

7. $y''+2y'=2+e^t, y(0)=1, y'(0)=2$.

Вариант №10

1. $\operatorname{ch}\left(1+\frac{\pi i}{3}\right),\ (4-3i)^{i}$.

2. $2z^8+1=0$.

3. Образ линии $x^2+y^2-2x=3$ при $w=z^{-1}$ (обход против часовой стрелки).

4. $v=e^x\cos y, f(0)=1+i$.

5. $\frac{z+4}{z^2+3z+2}$ по степеням $z-1$.

6.

   a) $\oint\limits_C \frac{iz(z-i)dz}{\sin\pi z}, C:\left|z-\frac{1}{2}\right|=1$.

   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(x^2+4\right)dx}{\left(x^2+9\right)^2}$.

7. $2y''-y'=\sin 3t, y(0)=2, y'(0)=1$.

Вариант №11

1. $\mathrm{ch}\left(2+\dfrac{\pi i}{2}\right),\ \left(-12+5i\right)^{-i}$.
2. $z^6-4z^3+8=0$.
3. Образ линии $A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0$ при $w=e^{\alpha i}z,\ \alpha\in R$.
4. $v=y-\dfrac{y}{x^2+y^2},f\left(1\right)=2$.
5. $\dfrac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$.
6.
   a) $\oint\limits_C\dfrac{\left(\sin 3z+2\right)dz}{z^2\left(z-\pi\right)},C:\left|z-3\right|=1$.

   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+5\right)^2}$.
7. $y''+y'-2y=-2\left(t+1\right),y\left(0\right)=y'\left(0\right)=1$.

Вариант №12

1. $\mathrm{Ln}\left(-1-i\right),\ \mathrm{sh}\left(1-\dfrac{\pi}{2}i\right)$.
2. $z^8-2\sqrt{3}z^4+4=0$.
3. Образ линии $y=2,x\in\left(0;1\right)$ при $w=e^z$.
4. $v=x^2-y^2+2x+1,f\left(0\right)=i$.
5. $\dfrac{z+1}{z\left(z-1\right)}$ по степеням $z+2-i$.
6.
   a) $\oint\limits_C\dfrac{\left(e^{zi}+2\right)dz}{\sin 3zi},C:\left|z\right|=1$.

   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.
7. $y''-9y=\sin t-\cos t,y\left(0\right)=-3,y'\left(0\right)=2$.

Вариант №13

1. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+3i\right), \left(-1+\sqrt{3}i\right)^{-3i}$.
2. $\operatorname{sh} z-\operatorname{ch} z=2i$.
3. Образ линии $|z|=1$ при $w=\frac{z+i}{z+2}$ (обход положительный).
4. $u=e^{x}\left(x\cos y-y\sin y\right), f(0)=0$.
5. $\frac{z+2}{z+z^{2}-2z^{3}}$.
6.
   a) $\oint\limits_{C}\frac{\left(\cos^{2} z+1\right)dz}{z^{2}-\pi^{2}}, C:|z-2|=3$.
   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^{2}+2\right)\left(x^{2}+3\right)^{2}}$.
7. $y''+4y'+29y=e^{-2t}, y(0)=0, y'(0)=1$.

Вариант №14

1. $\arccos(-3i), \left(\sqrt{3}+i\right)^{-6i}$.
2. $2z^{4}+1=\sqrt{3}i$.
3. Образ линии $y=0$ при $w=\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$, когда точка α переводится в начало координат.
4. $v=2xy+2x, f(0)=0$.
5. $\frac{2z}{z^{2}+4}$ по степеням $z+1+3i$.
6.
   a) $\oint\limits_{C}\frac{\left(\cos^{2} z-3\right)dz}{z^{2}+2\pi z}, C:|z+1|=2$.
   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^{2}\cos x\right)dx}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}$.
7. $y''-3y'+2y=e^{t}, y(0)=1, y'(0)=0$.

Вариант №15

1. $\operatorname{ch}\left(3+\frac{\pi i}{4}\right), \left(1-\sqrt{3}i\right)^{3i}$.

2. $z^3-8i=0$.

3. Образ линии $x^2+y^2=1$ при при $w=\frac{z+2}{z+i}$ (обход против часовой стрелки).

4. $u=e^{-y}\cos x+x, f(0)=1$.

5. $\frac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$.

6.

   a) $\oint\limits_C \frac{\left(z^2+1\right)dz}{\left(z^2+4\right)\sin\frac{z}{3}}, C:|z-1|=2$.

   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+5\right)^2}$.

7. $y''+4y=\sin 2t, y(0)=0, y'(0)=1$.

Вариант №16

1. $\arctan\left(\frac{3+4i}{5}\right), \left(\sqrt{2}\right)^{1-i}$.

2. $\sin z=2$.

3. Образ линии $y=2x, x\in R$ при $w=\frac{z-3}{z+3}$.

4. $u=\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}, f(0)=1$.

5. $\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}$ по степеням $z+2-i$.

6.

   a) $\oint\limits_C \frac{\left(z^3+\sin 2z\right)dz}{(z-\pi)\sin\frac{z}{2}}, C:\left|z-\frac{3}{2}\right|=2$.

   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^5}$.

7. $y''+4y=3\sin t+10\cos 3t, y(0)=-2, y'(0)=3$.

Вариант №17

1. $\arctan\left(\dfrac{4+3i}{5}\right), \left(1+i\right)^{4i}$.
2. $z^2-\left(2+i\right)z-\left(1-7i\right)=0$.
3. Образ полосы $a \le \operatorname{Im} z \le b$ при $w=z^2$.
4. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}+x, f\left(1\right)=2$.
5. $\dfrac{6z}{\left(z^2-4\right)\left(z^2-1\right)}$.
6.
    a) $\oint\limits_C z^2 \sin\dfrac{i}{z^2}dz, C:\left|z\right|=3$.
    b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\left(\cos 2x\right)dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.
7. $y''-y'-6y=2, y\left(0\right)=1, y'\left(0\right)=0$.

Вариант №18

1. $e^{\frac{\pi^2+4}{4+2\pi i}}, \operatorname{sh}\left(1-\dfrac{\pi i}{3}\right)$.
2. $(z(- z = 1+2i$.
3. Образ полосы $1 \le \operatorname{Re} z \le 2$ при $w=\dfrac{1}{z}$.
4. $v=1-\dfrac{y}{x^2+y^2}, f\left(1\right)=1+i$.
5. $\dfrac{2z}{z^2-4}$ по степеням $z+1-3i$.
6.
    a) $\oint\limits_C \dfrac{z\left(z+\pi\right)dz}{\left(z-\pi\right)\sin 3z}, C:\left|z-\dfrac{3}{2}\right|=1$.
    b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos x}{\left(x^2+1\right)^3}dx$.
7. $y''+y'+y=t^2+t, y\left(0\right)=1, y'\left(0\right)=-3$.

Вариант №19

1. $\operatorname{ch}\left(i\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)\right)$, $(-i)^{1+i}$.
2. $\left(z^3+1\right)\left(e^z+1\right)=0$.
3. Образ дуги $|z|=a, \varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ при $w=z^2$.
4. $u=x^3-3xy^2-x, f(0)=0$.
5. $\frac{1+z}{(z+3)^2(z-2i)}$.
6.
   a) $\oint\limits_C \frac{\left(ze^{\frac{1}{z}}-z-1\right)dz}{z^3}, C:|z|=1$.
   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\cos xdx}{x^4+5x^2+6}$.
7. $y''+y'+y=t^2+t, y(0)=1, y'(0)=-3$.

Вариант №20

1. $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)$, $\sqrt[5]{1+i}$.
2. $\operatorname{sh} z=i$.
3. Образ области $E: 0\le\arg z\le\frac{\pi}{2}$ при $w=z^3$.
4. $v=\frac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y, f(0)=2$.
5. $\frac{1}{z^2-3iz-2}$ по степеням $z-2i$.
6.
   a) $\oint\limits_C \frac{\left(z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1\right)dz}{z}, C:|z|=1$.
   b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 3x}{\left(x^2+4\right)^2}dx$.
7. $y''+y=\operatorname{sh} t, y(0)=2, y'(0)=1$.