

Анализ и синтез нелинейных стохастических систем

Основные определения и обозначения. Примеры базисных систем

Рыбаков К.А.

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

15 февраля 2018 г.

Рыбаков Константин Александрович, доцент каф. 805 МАИ

Лекции, вопросы к экзамену:

<http://dep805.ru/rk/tasks.htm>

Анализ и синтез нелинейных стохастических систем в авиационной технике и экономике
/ Спектральная теория систем управления / Нелинейный динамический анализ систем

8 факультет, 2 курс магистратуры

Лекции: [1](#), [2](#), ...

[Вопросы к экзамену.](#)

Расчетная работа: [часть 1](#), [часть 2](#), [часть 3](#).

[Вопросы к экзамену.](#)

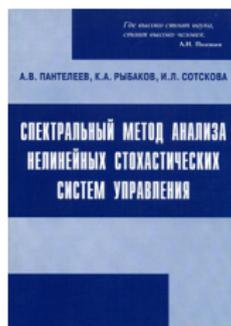
Литература:

- Пантелеев А. В., Рыбаков К. А., Сотскова И. Л. [Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления.](#) - М.: Вузовская книга, 2006.

Программное обеспечение: [Spectrum](#).

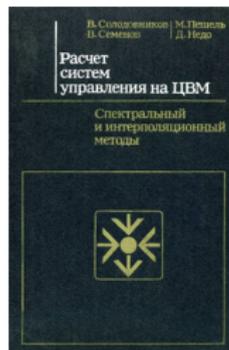
Литература

1. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2006.
2. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.
3. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. — М.: Изд-во МАИ, 2012.
4. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Моделирование распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ, 2016.



Дополнительная литература

1. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. — М.: Наука, 1974.
2. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральный метод расчета нестационарных систем управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1975.
3. Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. — М.: Машиностроение, 1979.



Дополнительная литература

4. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. — М.: МАИ, 1984.
5. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. — М.: Изд-во МАИ, 2011.
6. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных систем управления целого и дробного порядка проекционно-сеточным спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ, 2013.



Дополнительная литература

7. Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егунов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. — М.: Машиностроение, 1986.
8. Лапин С.В., Егунов Н.Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
9. Пупков К.А., Егунов Н.Д., Трофимов А.И. Статистические методы анализа, синтеза и идентификации нелинейных систем автоматического управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998.
10. Коваль В.А. Спектральный метод анализа и синтеза распределенных систем управления. — Саратов: СГТУ, 1997.
11. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. — К.: Наукова думка, 1972.
12. Гришин В.Н., Дятлов В.А., Милов Л.Т. Модели, алгоритмы и устройства идентификации сложных систем. — Л.: Энергоатомиздат, 1985.

Монографии и учебные пособия:

<http://dep805.ru/rk/booksets.htm>



Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.
Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом.
— М.: Издательство МАИ-ПРИНТ, 2010. — 160 с.

Изложены современные методы анализа многомерных нелинейных непрерывных стохастических систем управления с фиксированной структурой, основанные на спектральной форме математического описания. Для специалистов и инженеров, интересующихся современными задачами теории управления и методами их решения, а также для студентов старших курсов и аспирантов технических вузов и университетов.

ISBN 978-5-7035-2168-7 eLIBRARY.RU

[Читать на Google Books](#)

Пространство квадратично интегрируемых функций

$L_2(T)$ — пространство функций $f(t)$, определенных на множестве T , для которых

$$\int_T f^2(t) dt < \infty,$$

где $T = [t_0, t_1]$ или $T = [t_0, +\infty)$ или $T = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Норма в пространстве $L_2(T)$:

$$\|f(t)\|_{L_2(T)} = \left\{ \int_T f^2(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Скалярное произведение:

$$(f(t), g(t))_{L_2(T)} = \int_T f(t)g(t) dt, \quad \|f(t)\|_{L_2(T)}^2 = (f(t), f(t))_{L_2(T)}.$$

Ортонормированные базисные системы

Система функций $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$, определенных на множестве T , называется ортонормированной, если

$$(q(i, t), q(j, t))_{L_2(T)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Полная ортонормированная система функций называется базисом пространства $L_2(T)$, или базисной системой.

Представление функций рядами

Пусть $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис пространства $L_2(T)$. Тогда любую функцию $f(t) \in L_2(T)$ можно представить в виде ряда по функциям этой системы:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i q(i, t), \quad t \in T,$$

где

$$f_i = (q(i, t), f(t))_{L_2(T)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Числа f_i — коэффициенты разложения функции $f(t)$.

Таким образом, решение задачи представления функции $f(t) \in L_2(T)$ в виде ряда по функциям заданной базисной системы состоит в определении коэффициентов разложения f_i и записи соответствующего ряда.

Примеры базисных систем

1. Полиномы Лежандра (А.-М. Legendre) на отрезке $T = [0, \tau]$:

$$\hat{P}(i, t) = \sqrt{\frac{2i+1}{\tau}} \sum_{k=0}^i l_{ik} \frac{t^k}{\tau^k}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$l_{ik} = (-1)^{i-k} C_{i+k}^i C_i^{i-k}, \quad C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)}.$$

Тогда

$$\hat{P}(0, t) = \sqrt{\frac{1}{\tau}}, \quad \hat{P}(1, t) = \sqrt{\frac{3}{\tau}} \left(\frac{2}{\tau} t - 1 \right),$$

$$\hat{P}(2, t) = \sqrt{\frac{5}{\tau}} \left(\frac{6}{\tau^2} t^2 - \frac{6}{\tau} t + 1 \right),$$

$$\hat{P}(3, t) = \sqrt{\frac{7}{\tau}} \left(\frac{20}{\tau^3} t^3 - \frac{30}{\tau^2} t^2 + \frac{12}{\tau} t - 1 \right), \quad \dots$$

Примеры базисных систем

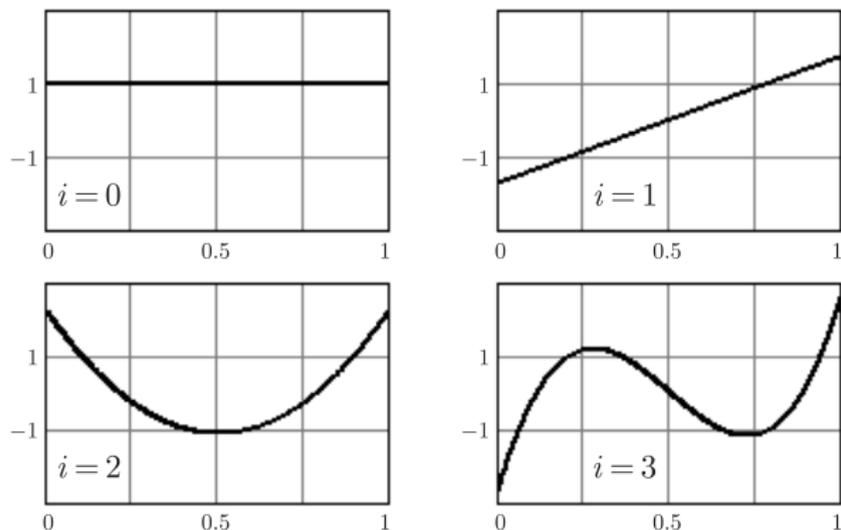


Рис.: Графики полиномов Лежандра, $i = 0, 1, 2, 3$.

Примеры базисных систем

2. Косинусоиды на отрезке $T = [0, \tau]$:

$$\hat{C}(i, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\tau}}, & i = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\tau}} \cos \frac{i\pi t}{\tau}, & i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{C}(0, t) &= \sqrt{\frac{1}{\tau}}, & \hat{C}(1, t) &= \sqrt{\frac{2}{\tau}} \cos \frac{\pi t}{\tau}, \\ \hat{C}(2, t) &= \sqrt{\frac{2}{\tau}} \cos \frac{2\pi t}{\tau}, & \hat{C}(3, t) &= \sqrt{\frac{2}{\tau}} \cos \frac{3\pi t}{\tau}, \quad \dots \end{aligned}$$

Примеры базисных систем

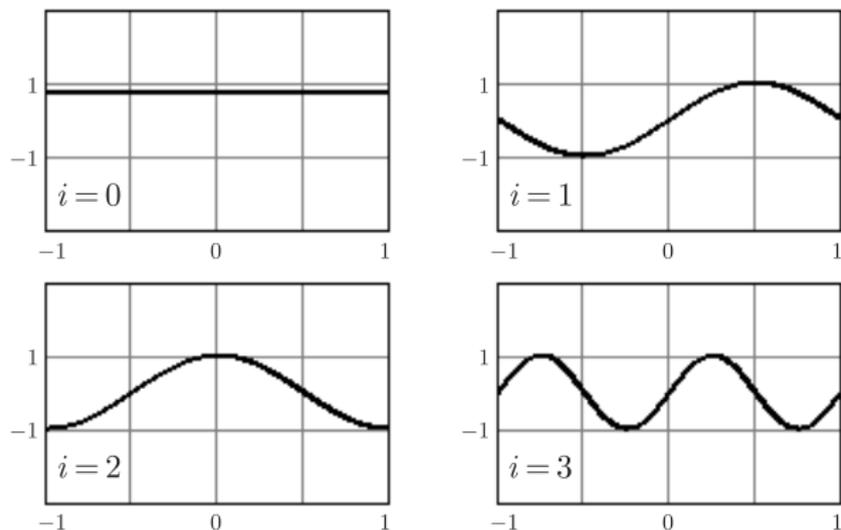


Рис.: Графики косинусов, $i = 0, 1, 2, 3$.

Примеры базисных систем

3. Функции Уолша (*J.L. Walsh*) на отрезке $T = [0, \tau]$:

$$\hat{\Omega}(i, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\tau}}, & i = 0, \\ \sqrt{\frac{1}{\tau}} \prod_{\{k: a_k=1\}} r(k, t), & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где a_k — коэффициенты в двоичном представлении числа i :

$$i = a_1 2^0 + a_2 2^1 + a_3 2^2 + \dots + a_k 2^{k-1} + \\ + \dots + a_{m+1} 2^m = (a_{m+1} \dots a_k \dots a_3 a_2 a_1)_2,$$

$m = \lceil \log_2 i \rceil$ — наибольшая степень в двоичном представлении числа i , $a_k \in \{0, 1\}$, а $r(k, t)$ — функция Радемахера (*H.A. Rademacher*), заданная выражением

$$r(k, t) = \text{sign} \left(\sin \frac{2^k \pi t}{\tau} \right) = (-1)^{\lfloor 2^k \frac{t}{\tau} \rfloor}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Примеры базисных систем

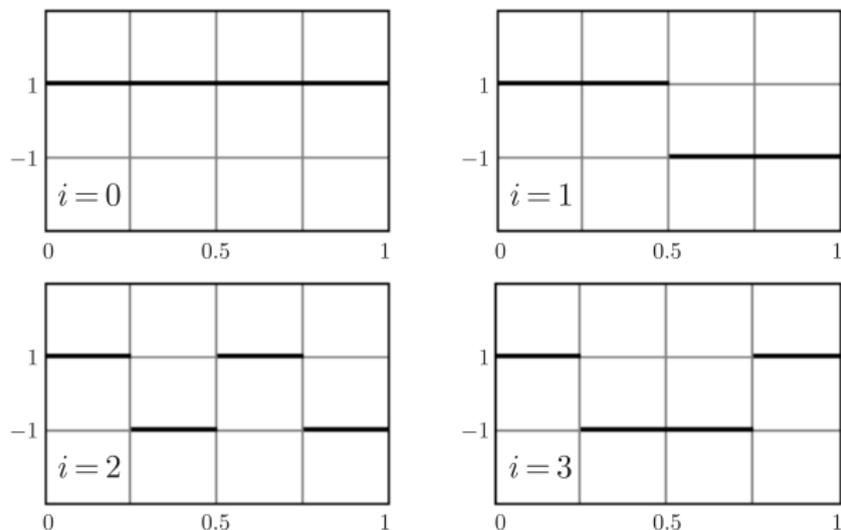


Рис.: Графики функций Уолша, $i = 0, 1, 2, 3$.

Пространство квадратично интегрируемых функций

$L_2(T; \nu(t))$ — пространство функций $f(t)$, определенных на множестве T , для которых

$$\int_T \nu(t) f^2(t) dt < \infty,$$

где $T = [t_0, t_1]$ или $T = [t_0, +\infty)$ или $T = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
Норма в пространстве $L_2(T; \nu(t))$:

$$\|f(t)\|_{L_2(T; \nu(t))} = \left\{ \int_T \nu(t) f^2(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

Скалярное произведение:

$$(f(t), g(t))_{L_2(T; \nu(t))} = \int_T \nu(t) f(t) g(t) dt.$$

$$\|f(t)\|_{L_2(T; \nu(t))}^2 = (f(t), f(t))_{L_2(T; \nu(t))}.$$

Ортонормированные базисные системы

Система функций $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$, определенных на множестве T , называется ортонормированной с весом $\nu(t)$, если

$$(q(i, t), q(j, t))_{L_2(T; \nu(t))} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Полная ортонормированная система функций называется базисом пространства $L_2(T; \nu(t))$, или базисной системой.

Примеры базисных систем

4. Полиномы Лагерра (*E.N. Laguerre*) на бесконечном полуинтервале $T = [0, +\infty)$ с весом $\nu(t) = e^{-t}$:

$$\hat{L}(i, t) = \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i-k} C_i^k t^k}{k!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Первые четыре полинома Лагерра:

$$\begin{aligned} \hat{L}(0, t) &= 1, & \hat{L}(1, t) &= t - 1, \\ \hat{L}(2, t) &= \frac{1}{2}t^2 - 2t + 1, & \hat{L}(3, t) &= \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 1. \end{aligned}$$

5. Функции Лагерра на бесконечном полуинтервале $T = [0, +\infty)$ с весом $\nu(t) = 1$:

$$\hat{\Psi}(i, t) = e^{-\frac{t}{2}} \hat{L}(i, t), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Примеры базисных систем

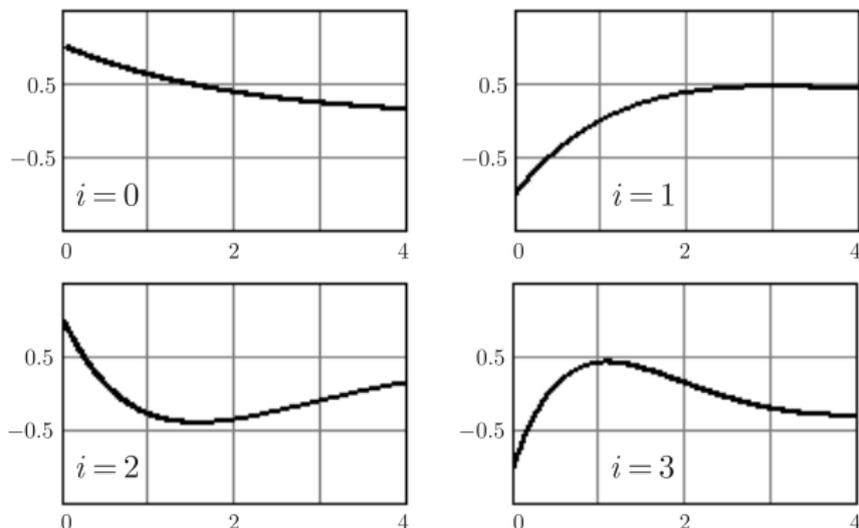


Рис.: Графики функций Лагерра, $i = 0, 1, 2, 3$.

Примеры базисных систем

6. Полиномы Эрмита (*C. Hermite*) на бесконечном интервале $T = \mathbb{R}$ с весом $\nu(t) = e^{-t^2}$:

$$\hat{H}(i, t) = \sqrt{\frac{i!}{2^i \sqrt{\pi}}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2t)^{i-2k}}{k!(i-2k)!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Первые четыре полинома Эрмита:

$$\begin{aligned} \hat{H}(0, t) &= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}, & \hat{H}(1, t) &= \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt[4]{\pi}}, \\ \hat{H}(2, t) &= \frac{\sqrt{2}(2t^2 - 1)}{2\sqrt[4]{\pi}}, & \hat{H}(3, t) &= \frac{\sqrt{3}(2t^3 - 3t)}{3\sqrt[4]{\pi}}. \end{aligned}$$

7. Функции Эрмита на бесконечном полуинтервале $T = \mathbb{R}$ с весом $\nu(t) = 1$:

$$\hat{\Phi}(i, t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \hat{H}(i, t), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Примеры базисных систем

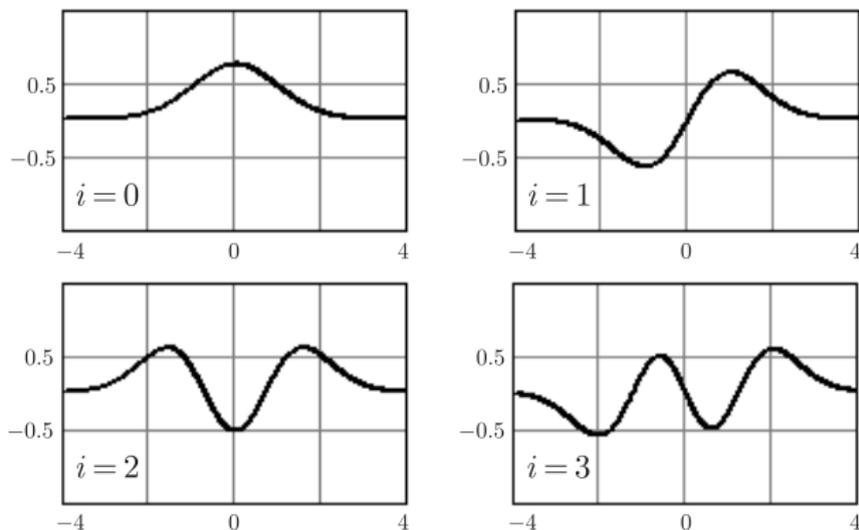


Рис.: Графики функций Эрмита, $i = 0, 1, 2, 3$.