Анализ и синтез нелинейных стохастических систем

Основные определения и обозначения. Примеры базисных систем

Рыбаков К.А.

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

1 марта 2018 г.

Биортонормированные базисные системы

Система функций $\{q^{\text{р}}(i,t), q^{\text{в}}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$, определенных на множестве T, называется биортонормированной с весом $\nu(t)$, если

$$\big(q^{\text{р}}(i,t), q^{\text{в}}(j,t)\big)_{L_2(T;\nu(t))} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i,j = 0,1,2,\ldots,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Система функций $\{q^{\text{р}}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис разложения, а $\{q^{\text{в}}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис восстановления (двойственные базисы).

Представление функций рядами

Пусть $\{q^{\text{р}}(i,t), q^{\text{в}}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — биортонормированный базис пространства $L_2(T)$. Тогда любую функцию $f(t) \in L_2(T)$ можно представить в виде ряда по функциям базисной системы восстановления:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i q^{\text{в}}(i,t), \quad t \in T,$$

где

$$f_i = \big(q^{\text{р}}(i,t), f(t)\big)_{L_2(T)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Таким образом, решение задачи представления функции $f(t) \in L_2(T)$ в виде ряда по функциям заданной базисной системы состоит в определении коэффициентов разложения f_i и записи соответствующего ряда.

Распределение весовой функции

Система функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$, определенных на множестве T, является ортонормированной с весом $\nu(t)$. Тогда

1) $\{\sqrt{\nu(t)}q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — ортонормированная система с единичным весом.

Пример: полиномы Эрмита $\rightarrow$ функции Эрмита.

2) $\{\nu(t)q(i,t), q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{\nu(t)q(i,t), q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — биортонормированные системы.

Пример: полиномы + функции Эрмита.

3) $\{\nu^{\alpha}(t)q(i,t), \nu^{\beta}(t)q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — биортонормированная система с весом $\nu^{\gamma}(t)$, $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Пример: Обобщенные функции Эрмита.

Преобразования базисных систем

Если $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — ортонормированная базисная система в пространстве $L_2([0,1])$, то для $L_2(T)$ при $T=[t_0,t_1]$ ортонормированной базисной системой будет $\{p(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$, где

$$p(i,t)=\frac{1}{\sqrt{t_1-t_0}}\,q\left(i,\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right),\quad i=0,1,2,\ldots$$

Аналогично для базисов в пространстве с весом и для биортонормированных базисных систем.

Преобразования базисных систем

Если $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — ортонормированная базисная система в пространстве $L_2([0,\frac{\pi}{2}])$, то для $L_2(T)$ при $T=[0,+\infty)$ ортонормированной базисной системой будет $\{p(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ с весом $\nu(t)$, где

$$\nu(t)=\frac{1}{1+t^2},\quad p(i,t)=q\Big(i,\operatorname{arctg} t\Big),\quad i=0,1,2,\ldots$$

Если же $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — ортонормированная базисная система в пространстве $L_2([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$, то система функций $\{p(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ с весом $\nu(t)$ — ортонормированная базисная система пространства $L_2(\mathbb{R})$.
Возможна и другая замена переменных, кроме $t\to\operatorname{arctg} t$:
$t\to\operatorname{arctg} t^n$, $t\to\operatorname{arctg}(t+t^n)$ и др.

Финитные базисные системы

Пусть $\{q^{\text{р}}(i,t), q^{\text{в}}(i,t)\}_{i=0}^{L-1}$ — конечная биортонормированная система функций (финитная базисная система) в пространстве $L_2(T)$, $T = [t_0, t_1]$:

$$\big(q^{\text{р}}(i,t), q^{\text{в}}(j,t)\big)_{L_2(T)} = \int_{t_0}^{t_1} q^{\text{р}}(i,t) q^{\text{в}}(j,t) dt = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$i, j = 0, 1, \ldots, L-1.$$

Система функций $\{q^{\text{р}}(i,t)\}_{i=0}^{L-1}$ — базис разложения, а $\{q^{\text{в}}(i,t)\}_{i=0}^{L-1}$ — базис восстановления (двойственные базисы).

Нахождение двойственного базиса

Пусть $\Lambda^{\text{р}} = (\Lambda^{\text{р}}_{ij})$ и $\Lambda^{\text{в}} = (\Lambda^{\text{в}}_{ij})$ соответствующие матрицы Грама для финитных базисов разложения и восстановления:

$$\Lambda^{\text{р}}_{ij} = \big(q^{\text{р}}(i,t), q^{\text{р}}(j,t)\big)_{L_2(T)}, \quad \Lambda^{\text{в}}_{ij} = \big(q^{\text{в}}(i,t), q^{\text{в}}(j,t)\big)_{L_2(T)},$$

$$i, j = 0, 1, \ldots, L-1,$$

тогда $\Lambda^{\text{р}} = (\Lambda^{\text{в}})^{-1}$, а функции $\{q^{\text{р}}(i,t)\}_{i=0}^{L-1}$ и $\{q^{\text{в}}(i,t)\}_{i=0}^{L-1}$ связаны соотношениями

$$q^{\text{в}}(i,t) = \sum_{j=0}^{L-1} \Lambda^{\text{в}}_{ij} q^{\text{р}}(j,t), \quad q^{\text{р}}(i,t) = \sum_{j=0}^{L-1} \Lambda^{\text{р}}_{ij} q^{\text{в}}(j,t),$$

$$i = 0, 1, \ldots, L-1.$$

Порождающая функция

Пусть функция $F^*(t)$ определена на множестве $\mathbb{R}$, $\operatorname{supp} F(x) = [-\theta, \theta]$. Тогда

$$F(i,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} F^*\left(\frac{t}{h} - i\right), \;\; h = \frac{1}{L-1}, \;\; t \in T = [0,1], \;\; i = 0, 1, \ldots, L-1.$$

Пример:

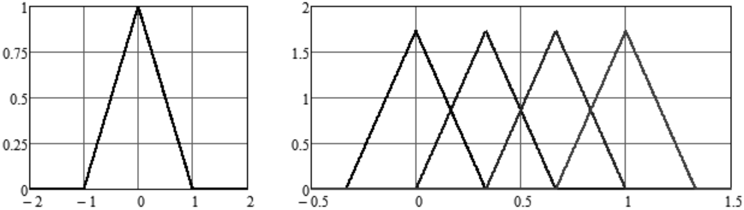

Рис.: Графики функций $F^*(t)$ (слева) и $F_i(t)$ при $L = 4$ (справа).

Примеры финитных базисных систем

1. Сплайны Шёнберга (*I.J. Schoenberg*):

$$B_0^*(t) = \begin{cases} 1, \ t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ 0, \ t \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

$$B_p^*(t) = B_{p-1}^*(t) * B_0^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{p-1}^*(\tau) B_0^*(t-\tau) d\tau, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

В частности,

$$B_1^*(t) = \begin{cases} t+1, \ t \in [-1, 0], \\ 1-t, \ t \in [0, 1], \\ 0, \ t \notin [-1, 1]; \end{cases} \qquad B_2^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+t\right)^2, \ t \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right], \\ \frac{3}{4} - t^2, \ t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-t\right)^2, \ t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], \\ 0, \ t \notin \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]. \end{cases}$$

Примеры финитных базисных систем

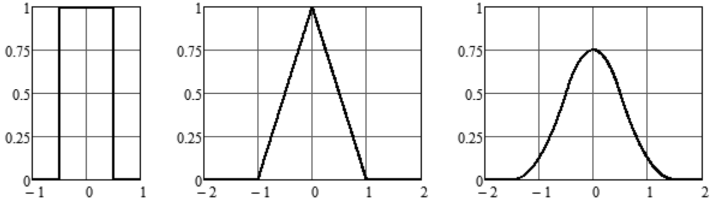

Рис.: Графики функций $B_0^*(t)$ (слева), $B_1^*(t)$ (в центре) и $B_2^*(t)$ (справа).

Примеры финитных базисных систем

2. Симметричные сплайны Леонтьева (*В.Л. Леонтьев*):

$$\Phi_0^*(\alpha,\theta,t)=\begin{cases} -\frac{\alpha}{\theta},\ t\in\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+\theta\right),\\ \frac{1+2\alpha}{1-2\theta},\ t\in\left[-\frac{1}{2}+\theta,\frac{1}{2}-\theta\right],\\ -\frac{\alpha}{\theta},\ t\in\left(\frac{1}{2}-\theta,\frac{1}{2}\right],\\ 0,\ t\notin\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\end{cases}$$

$$\Phi_p^*(\alpha,\theta,t)=\Phi_{p-1}^*(\alpha,\theta,t)*B_0^*(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{p-1}^*(\alpha,\theta,\tau)B_0^*(t-\tau)d\tau,$$

где α и θ — параметры: $\alpha>0$, $0<\theta<\frac{1}{2}$; $p=1,2,3,\ldots$
В частности,

$$\Phi_1^*(\alpha,\theta,t)=\begin{cases} \frac{\alpha}{\theta}t+1,\ t\in[0,\theta],\\ -\frac{1+2\alpha}{1-2\theta}\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2},\ t\in[\theta,1-\theta],\\ \frac{\alpha}{\theta}\left(t-1\right),\ t\in[1-\theta,1],\\ 0,\ t>1;\end{cases}$$

Примеры финитных базисных систем

$$\Phi_2^*(\alpha,\theta,t)=\begin{cases} -\frac{1+2\alpha}{1-2\theta}t^2+\frac{2\alpha+2\theta+3}{4},\ t\in\left[0,\frac{1}{2}-\theta\right],\\ \frac{\alpha}{\theta}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-t+1,\ t\in\left[\frac{1}{2}-\theta,\frac{1}{2}\right],\\ -\frac{\alpha}{2\theta}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-t+1,\ t\in\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\theta\right],\\ \frac{1+2\alpha}{2(1-2\theta)}(t-1)^2-\frac{1}{2}\left(t-1\right)-\frac{2\alpha+2\theta-1}{8},\ t\in\left[\frac{1}{2}+\theta,\frac{3}{2}-\theta\right],\\ -\frac{\alpha}{2\theta}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2,\ t\in\left[\frac{3}{2}-\theta,\frac{3}{2}\right],\\ 0,\ t>\frac{3}{2}, \end{cases}$$

при дополнительном условии четности, т.е.

$$\Phi_1^*(\alpha,\theta,-t)=\Phi_1^*(\alpha,\theta,t),\quad \Phi_2^*(\alpha,\theta,-t)=\Phi_2^*(\alpha,\theta,t).$$

Параметры:

$$\theta=\theta_1=\frac{1}{4},\quad \alpha=\alpha_1=\frac{\sqrt{41}-5}{8}\quad (p=1);$$

$$\theta=\theta_2=\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\left(\sqrt{C}+\sqrt{\frac{684}{\sqrt{C}}-C-195}\right),\quad \alpha=\alpha_2=-\theta_2+\frac{3}{4(1-\theta_2)},$$

$$C=\kappa+\frac{1369}{\kappa}-65,\quad \kappa=\sqrt[3]{62317+108\sqrt{112970}}\quad (p=2).$$

3. Несимметричные сплайны Леонтьева:

$$\Psi_1^*(\alpha,\theta,t)=\begin{cases} 1+t,\ t\in[-1,-1+\theta]\cup[-\theta,0], \\ -\alpha+\frac{\theta+\alpha}{\theta-\frac{1}{2}}\left(t+\frac{1}{2}\right),\ t\in\left[-1+\theta,-\frac{1}{2}\right], \\ -\alpha+\frac{\theta-\alpha-1}{\theta-\frac{1}{2}}\left(t+\frac{1}{2}\right),\ t\in\left[-\frac{1}{2},-\theta\right], \\ 1-t,\ t\in[0,\theta]\cup[1-\theta,1], \\ 1+\alpha-\frac{\theta+\alpha}{\theta-\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{2}\right),\ t\in\left[\theta,\frac{1}{2}\right], \\ 1+\alpha-\frac{\theta-\alpha-1}{\theta-\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{2}\right),\ t\in\left[\frac{1}{2},1-\theta\right], \\ 0,\ t\notin[-1,1], \end{cases}$$

$$\Psi_p^*(\alpha,\theta,t)=\Psi_{p-1}^*(\alpha,\theta,t)*B_0^*(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_{p-1}^*(\alpha,\theta,\tau)B_0^*(t-\tau)\,d\tau,$$

где α и θ — параметры: $\alpha>0$, $0<\theta<\frac{1}{2}$; $p=2,3,4,\ldots$

Примеры финитных базисных систем

$$\Psi_2^*(\alpha,\theta,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(t+\frac{3}{2}\right)^2, \ t \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}+\theta\right], \\ \frac{\theta+\alpha}{2\theta-1}\left(t+1\right)^2 - \alpha(t+1) + \frac{2\alpha\theta+\theta-\alpha}{4}, \ t \in \left[-\frac{3}{2}+\theta, -1\right], \\ \frac{\theta-\alpha-1}{2\theta-1}\left(t+1\right)^2 - \alpha(t+1) + \frac{2\alpha\theta+\theta-\alpha}{4}, \ t \in \left[-1, -\frac{1}{2}-\theta\right], \\ \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(t+\frac{1}{2}\right) + \frac{4\alpha\theta+2\theta-2\alpha+1}{4}, \ t \in \left[-\frac{1}{2}-\theta, -\frac{1}{2}\right], \\ -\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(t+\frac{1}{2}\right) + \frac{4\alpha\theta+2\theta-2\alpha+1}{4}, \ t \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+\theta\right], \\ -\frac{\theta+\alpha}{\theta-\frac{1}{2}}t^2 + (1+2\alpha)t + \frac{3}{4}, \ t \in \left[-\frac{1}{2}+\theta, 0\right], \\ -\frac{\theta-\alpha-1}{\theta-\frac{1}{2}}t^2 + (1+2\alpha)t + \frac{3}{4}, \ t \in \left[0, \frac{1}{2}-\theta\right], \\ -\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t-\frac{1}{2}\right) - \frac{4\alpha\theta+2\theta-2\alpha-3}{4}, \ t \in \left[\frac{1}{2}-\theta, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t-\frac{1}{2}\right) - \frac{4\alpha\theta+2\theta-2\alpha-3}{4}, \ t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\theta\right], \\ \frac{\theta+\alpha}{2\theta-1}\left(t-1\right)^2 - (1+\alpha)(t-1) - \frac{2\alpha\theta+\theta-\alpha-1}{4}, \ t \in \left[\frac{1}{2}+\theta, 1\right], \\ \frac{\theta-\alpha-1}{2\theta-1}\left(t-1\right)^2 - (1+\alpha)(t-1) - \frac{2\alpha\theta+\theta-\alpha-1}{4}, \ t \in \left[1, \frac{3}{2}-\theta\right], \\ \frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2, \ t \in \left[\frac{3}{2}-\theta, \frac{3}{2}\right], \\ 0, \ t \notin \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]. \end{cases}$$

Параметры:

$$\theta = \theta_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2} \quad (p=1); \qquad \theta = \theta_2 = \frac{4}{15}, \ \alpha = \alpha_2 = 3 \quad (p=2).$$

Примеры финитных базисных систем

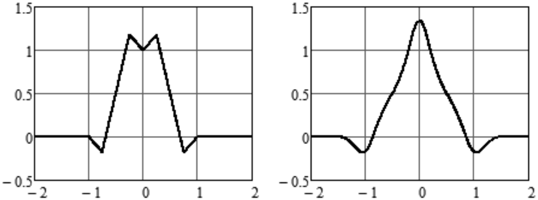

Рис.: Графики функций $\Phi_1^*(\alpha_1, \theta_1, t)$ (слева) и $\Phi_2^*(\alpha_2, \theta_2, t)$ (справа).

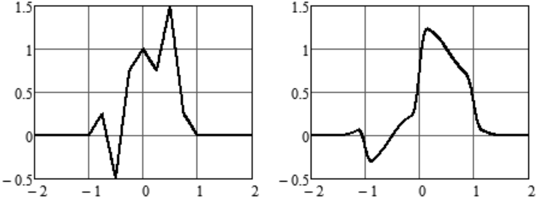

Рис.: Графики функций $\Psi_1^*(\alpha_1, \theta_1, t)$ (слева) и $\Psi_2^*(\alpha_2, \theta_2, t)$ (справа).

Примеры финитных базисных систем

4. Локальные полиномиальные сплайны степени p:

$$S_p^*(t) = \begin{cases} 2^{p-1}(1+t)^p, \ t \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \\ 1 - 2^{p-1}|t|^p, \ t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ 2^{p-1}(1-t)^p, \ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 0, \ t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

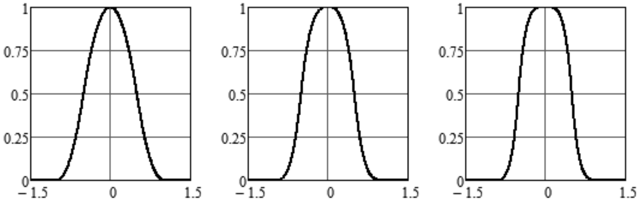

Рис.: Графики функций $S_2^*(t)$ (слева), $S_3^*(t)$ (в центре) и $S_4^*(t)$ (справа).

Примеры финитных базисных систем

5. Кубические сплайны Эрмита (*C. Hermite*):

$$X_3^*(t) = \begin{cases} 1 - 3t^2 - 2t^3, \ t \in [-1, 0], \\ 1 - 3t^2 + 2t^3, \ t \in [0, 1], \\ 0, \ t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

$$H_3^*(t) = \begin{cases} (1 - t^2)t, \ t \in [-1, 1], \\ 0, \ t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

6. Произвольная симметричная функция:

$$F^*(t) = \begin{cases} 1 - f(t), \ t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ f(1 - t), \ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ f(1 + t), \ t \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \\ 0, \ t \notin [-1, 1], \end{cases}$$

где $f(t)\colon \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1]$ с условиями $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Например,

$$G^*(t) = \begin{cases} e^{-t^2 \ln 16}, & t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ 1 - e^{-(1-t)^2 \ln 16}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 1 - e^{-(1+t)^2 \ln 16}, & t \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

$$C^*(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(\pi t), & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

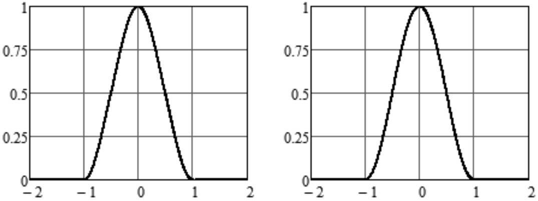

Рис.: Графики функций $G^*(t)$ (слева) и $C^*(t)$ (справа).

Примеры финитных базисных систем

7. Произвольная асимметричная функция:

$$F^*(t) = \begin{cases} f(t), \ t \in \big[0, 1\big), \\ 1 - f(1 + t), \ t \in \big[-1, 0\big), \\ 0, \ t \notin [-1, 1), \end{cases}$$

где $f(t)\colon [0, 1] \to [0, 1]$.