Анализ и синтез нелинейных стохастических систем

Спектральные характеристики функций и линейных операторов

Рыбаков К.А.

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

15 марта 2018 г.

Спектральные характеристики функций

Пусть $h(t) \in L_2(T)$, $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — ортонормированная базисная система в пространстве $L_2(T)$.

Матрица-столбец $H = (h_i)$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения функции $h(t)$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$, называется спектральной характеристикой функции $h(t)$, а элементы h_i — координатами спектральной характеристики.

Отображение, ставящее в соответствие функции $h(t)$ ее спектральную характеристику H, называется спектральным преобразованием и обозначается $\mathbb{S}$, т.е.

$$\mathbb{S}\big[h(t)\big] = H = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

где $h_i = \big(q(i,t), h(t)\big)_{L_2(T)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

Спектральные характеристики функций

Обратный переход от спектральной характеристики к соответствующей функции осуществляется по формуле обращения ($\mathbb{S}^{-1}$ — обратное спектральное преобразование):

$$h(t) = \mathbb{S}^{-1}\big[H\big] = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot q(i,t), \quad t \in T.$$

Пример. Найти спектральную характеристику функции $h(t) = t^2 - 1$ относительно полиномов Лежандра, заданных на отрезке $T = [0,4]$.
Воспользуемся формулой для коэффициентов разложения:

$$h_0 = \int\limits_0^4 (t^2-1)\hat{P}(0,t)dt = \int\limits_0^4 (t^2-1)\sqrt{\tfrac{1}{4}}dt = \tfrac{26}{3},$$

$$h_1 = \int\limits_0^4 (t^2-1)\hat{P}(1,t)dt = \int\limits_0^4 (t^2-1)\sqrt{\tfrac{3}{4}}\Big(\tfrac{2}{4}t-1\Big)dt = \tfrac{16\sqrt{3}}{3},$$

$$h_2 = \int\limits_0^4 (t^2-1)\hat{P}(2,t)dt = \int\limits_0^4 (t^2-1)\sqrt{\tfrac{5}{4}}\left(\tfrac{6}{4^2}t^2 - \tfrac{6}{4}t + 1\right)dt = \tfrac{16\sqrt{5}}{15},$$

$$h_i = \int\limits_0^4 (t^2-1)\hat{P}(i,t)dt = 0, \quad i = 3,4,5,\ldots,$$

следовательно

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{26}{3} & \dfrac{16\sqrt{3}}{3} & \dfrac{16\sqrt{5}}{15} & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Проверим найденное решение, применяя формулу обращения:

$$h(t) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot \hat{P}(i,t) = \tfrac{26}{3}\hat{P}(0,t) + \tfrac{16\sqrt{3}}{3}\hat{P}(1,t) + \tfrac{16\sqrt{5}}{15}\hat{P}(2,t) =$$

$$= \tfrac{26}{3}\sqrt{\tfrac{1}{4}} + \tfrac{16\sqrt{3}}{3}\sqrt{\tfrac{3}{4}}\left(\tfrac{2}{4}t - 1\right) + \tfrac{16\sqrt{5}}{15}\sqrt{\tfrac{5}{4}}\left(\tfrac{6}{4^2}t^2 - \tfrac{6}{4}t + 1\right) = t^2 - 1.$$

Спектральные характеристики обобщенных функций

Понятие спектральной характеристики распространяется и на обобщенные функции: δ-функцию и ее производные.
Например, найдем координаты спектральной характеристики функции $\delta(t-t')$:

$$\Delta_i^{t'} = \big(q(i,t), \delta(t-t')\big)_{L_2(T)} = \int\limits_T q(i,t)\delta(t-t')dt, \quad i = 0,1,2,\ldots,$$

где t' — момент приложения импульсного воздействия, $t' \in T$.
Учитывая определение δ-функции, получаем

$$\Delta_i^{t'} = q(i,t'), \quad i = 0,1,2,\ldots,$$

т.е.

$$\Delta^{t'} = \begin{bmatrix} q(0,t') & q(1,t') & q(2,t') & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Матрица-столбец $\Delta^{t'}$ называется спектральной характеристикой δ-функции, определенной относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$, и представляет собой обобщенную функцию в спектральной области (в пространстве спектральных характеристик).

Пример. Определить спектральную характеристику функции $\delta(t)$ относительно функций Уолша, заданных на отрезке $T = [0,1]$. Для любого номера $i = 0,1,2,\ldots$ функция Уолша $\hat{\Omega}(i,0) = 1$. Тогда, очевидно, что $\Delta_i = 1$, поэтому

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Свойства спектральных характеристик функций

1. Линейность.
Спектральная характеристика линейной комбинации функций является линейной комбинацией их спектральных характеристик:

$$\mathbb{S}\Bigg[\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot h_k(t)\Bigg] = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mathbb{S}\big[h_k(t)\big], \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

2. Начальное значение функции.
Значение функции $h(t)$ в точке t_0 по известной спектральной характеристике H задается формулой обращения:

$$h(t_0) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot q(i, t_0) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot \Delta_i^{t_0}.$$

Аналогично определяется значение функции для любой другой точки $t \in T$.

Свойства спектральных характеристик функций

3. Сохранение нормы.
Если $h(t) \in L_2(T)$, $\mathbb{S}[h(t)] = H$, то $\|h(t)\|_{L_2(T)} = \|H\|_{l_2}$, где l_2 — пространство квадратично суммируемых последовательностей, для которых

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i^2 < \infty.$$

Норма и скалярное произведение в пространстве l_2:

$$\|H\|_{l_2} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} h_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (H,G)_{l_2} = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \, g_i.$$

Спектральное преобразование $\mathbb{S}$ сохраняет норму (и скалярное произведение), т.е. $\mathbb{S}$ — ортогональное преобразование.

Пусть $h(t), w(t) \in L_2(T)$, $w(t) = \mathcal{A}h(t)$, где $\mathcal{A}$ — линейный оператор (линейное преобразование $L_2(T)$).
$w(t)$ — образ элемента $h(t)$, $h(t)$ — прообраз элемента $w(t)$.
$\mathbb{S}[h(t)] = H$, $\mathbb{S}[w(t)] = W$ — соответствующие спектральные характеристики, определенные относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$.

$$
\begin{array}{ccc}
h(t) & \overset{\mathcal{A}}{\to} & w(t) \\
\mathbb{S}\downarrow & & \mathbb{S}\downarrow \\
H & \overset{A}{\to} & W
\end{array}
$$

A — линейный оператор (линейное преобразование l_2), бесконечная матрица.

Спектральные характеристики линейных операторов

Двумерная матрица $A = (a_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$a_{ij} = \big(q(i,t), \mathcal{A}q(j,t)\big)_{L_2(T)}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots,$$

называется спектральной характеристикой оператора $\mathcal{A}$.

Так же, как и в случае спектральных характеристик функций, отображение, ставящее в соответствие линейному оператору его спектральную характеристику, называется спектральным преобразованием и обозначается $\mathbb{S}$, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{A}] = A$.

Спектральные характеристики линейных операторов

Утверждение. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(T)$; $h(t) \in L_2(T)$ — заданная функция; A и H — спектральные характеристики оператора $\mathcal{A}$ и функции $h(t)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда $\mathbb{S}[\mathcal{A}h(t)] = A \cdot H$, т.е. спектральная характеристика образа функции $h(t)$ равна произведению спектральной характеристики оператора $\mathcal{A}$ и спектральной характеристики функции $h(t)$.

Обозначим через $w(t)$ образ функции $h(t)$, т.е. $w(t) = \mathcal{A}h(t)$, и представим функцию $h(t)$ в виде ряда по функциям базисной системы и воспользуемся свойством линейности оператора $\mathcal{A}$:

$$w(t) = \mathcal{A}\sum_{j=0}^{\infty} h_j \cdot q(j,t) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \cdot \mathcal{A}q(j,t).$$

Спектральные характеристики линейных операторов

Найдем коэффициенты разложения функции $w(t)$ по функциям базисной системы:

$$w_i = \big(q(i,t), w(t)\big)_{L_2(T)} = \left(q(i,t), \sum_{j=0}^{\infty} h_j \cdot \mathcal{A}q(j,t)\right)_{L_2(T)}, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

Учитывая свойство линейности скалярного произведения по каждому сомножителю, получаем

$$w_i = \sum_{j=0}^{\infty} \big(q(i,t), \mathcal{A}q(j,t)\big)_{L_2(T)} \cdot h_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \cdot h_j, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

Тогда по определению произведения матриц справедливо равенство $W = A \cdot H$, где W — спектральная характеристика функции $w(t)$, следовательно, $\mathbb{S}[\mathcal{A}h(t)] = A \cdot H$.

Свойства спектральных характеристик линейных операторов

1. Спектральное преобразование тождественного оператора. Спектральная характеристика тождественного оператора $\mathcal{I}$ представляет собой двумерную единичную матрицу $\mathbb{S}[\mathcal{I}] = E$.

2. Спектральное преобразование композиции операторов. Спектральная характеристика композиции линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равна произведению их спектральных характеристик:

$$\mathbb{S}\big[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}\big] = \mathbb{S}\big[\mathcal{A}\big] \cdot \mathbb{S}\big[\mathcal{B}\big] = A \cdot B,$$

где $A = \mathbb{S}[\mathcal{A}]$, $B = \mathbb{S}[\mathcal{B}]$ (композицией операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, определяемый выражением $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})h(t) = \mathcal{A}[\mathcal{B}h(t)]$.

Свойства спектральных характеристик линейных операторов

3. Спектральное преобразование обратного оператора.
Предположим, что для линейного оператора $\mathcal{A}$ существует обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Тогда спектральная характеристика обратного оператора равна обратной спектральной характеристике оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}^{-1}] = A^{-1},$$

где $A = \mathbb{S}[\mathcal{A}]$.

Операторы умножения

Пусть $a(t)$ — локально интегрируемая функция на множестве T, $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(T)$.

Оператор умножения на функцию $a(t)$ задается следующим образом: $\mathcal{A}h(t) = a(t)h(t)$, где $h(t) \in L_2(T)$.

Двумерная матрица $A = (a_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$a_{ij} = \big(q(i,t), a(t) \cdot q(j,t)\big)_{L_2(T)}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots,$$

называется спектральной характеристикой оператора умножения на функцию $a(t)$, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{A}] = A$.

Операторы умножения

1. Спектральная характеристика оператора умножения является симметрической матрицей, т.е. $A = A^{\mathrm{T}}$.

2. Спектральная характеристика оператора умножения на константу α, т.е. $\mathcal{A}h(t) = \alpha h(t)$, $h(t) \in L_2(T)$, равна произведению этой константы на двумерную единичную матрицу: $A = \alpha E$.

3. Спектральная характеристика оператора умножения на сумму (разность) двух функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$, т.е.
$\mathcal{A}h(t) = (a_1(t) \pm a_2(t))h(t)$, равна сумме (разности) спектральных характеристик операторов умножения на функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$:
$A = A_1 \pm A_2$, где $A_i = \mathbb{S}[\mathcal{A}_i]$, $\mathcal{A}_i h(t) = a_i(t)h(t)$, $i = 1, 2$.

Операторы умножения

Пример. Спектральная характеристика A оператора умножения на функцию $a(t) = t$ относительно полиномов Лежандра:

$$A = \tau \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2\sqrt{15}} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2}{2\sqrt{15}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{35}} & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{35}} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где $c_{mm} = \frac{1}{2}$, $c_{m-1,m} = c_{m,m-1} = \frac{m}{2\sqrt{4m^2-1}}$, $c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $k = 2, 3, 4, \dots, m$.

Операторы умножения

Пример. Найти спектральную характеристику функции $w(t) = t^3 - t = t(t^2 - 1)$ относительно полиномов Лежандра, заданных на отрезке $T = [0, 4]$.

Решение.

$$W = A \cdot H =$$

$$= 4 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2\sqrt{15}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2}{2\sqrt{15}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{35}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{35}} & \frac{1}{2} & \frac{4}{2\sqrt{63}} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{2\sqrt{63}} & \frac{1}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{26}{3} \\ \frac{16\sqrt{3}}{3} \\ \frac{16\sqrt{5}}{15} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

Операторы умножения

$$
= 4 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{26}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{2\sqrt{15}} \cdot \frac{16\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{2\sqrt{15}} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{16\sqrt{5}}{15} \\ \frac{3}{2\sqrt{35}} \cdot \frac{16\sqrt{5}}{15} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ \frac{268\sqrt{3}}{15} \\ \frac{32\sqrt{5}}{5} \\ \frac{32\sqrt{7}}{35} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}.
$$

Проверим найденное решение, применяя формулу обращения:

$$
w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \cdot \hat{P}(i,t) = 28\hat{P}(0,t) + \frac{268\sqrt{3}}{15}\hat{P}(1,t) +
$$

$$
+ \frac{32\sqrt{5}}{5}\hat{P}(2,t) + \frac{32\sqrt{7}}{35}\hat{P}(3,t) = 28\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{268\sqrt{3}}{15}\sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{2}{4}t - 1\right) +
$$

$$
+ \frac{32\sqrt{5}}{5}\sqrt{\frac{5}{4}}\left(\frac{6}{4^2}t^2 - \frac{6}{4}t + 1\right) + \frac{32\sqrt{7}}{35}\sqrt{\frac{7}{4}}\left(\frac{5}{16}t^3 - \frac{15}{8}t^2 + 3t - 1\right) = t^3 - t.
$$

Множительное звено

Пусть $a(t) \in L_2(T)$, $\mathcal{A}$ — оператор умножения на функцию $a(t)$. $\mathbb{S}[a(t)] = H$, $\mathbb{S}[\mathcal{A}] = A$ — соответствующие спектральные характеристики, определенные относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$.

$$\begin{array}{ccc} a(t) & & \\ \mathbb{S}\downarrow & \mathbb{S}\searrow & \\ H & \stackrel{V}{\rightarrow} & A \end{array}$$

V — линейный оператор, преобразующий матрицу-столбец в двумерную матрицу, бесконечная трехмерная матрица.

Множительное звено

Трехмерная матрица $V = (v_{ijk})$, элементы которой определяются формулой

$$v_{ijk} = \big(q(i,t), q(j,t) \cdot q(k,t)\big)_{L_2(T)}, \quad i,j,k = 0,1,2,\ldots,$$

называется спектральной характеристикой множительного звена.

Каждое сечение матрицы V при фиксированном значении индекса k представляет собой спектральную характеристику оператора умножения на базисную функцию $q(k,t)$.

Утверждение. Пусть A — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a(t) \in L_2(T)$, H — спектральная характеристика функции $a(t)$, V — спектральная характеристика множительного звена, определенные относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда спектральные характеристики A и H связаны соотношением $A = V \odot H$.

Множительное звено

С помощью спектральной характеристики множительного звена может быть установлена связь между спектральными характеристиками функций $h_1(t)$, $h_2(t)$ и их произведения $h_1(t) \cdot h_2(t)$, т.е.

$$\mathbb{S}\big[h_1(t) \cdot h_2(t)\big] = \big(V \odot H_1\big) \cdot H_2,$$

где H_1 и H_2 — спектральные характеристики функций $h_1(t)$ и $h_2(t)$ соответственно, а $V \odot H$ — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $h_1(t)$.

Аналогично можно определить спектральную характеристику свертки функции.

Операторы дифференцирования

Пусть $\mathcal{D}_t$ — оператор дифференцирования, определенный на пространстве $L_2(T)$:

$$\mathcal{D}_t h(t) = \frac{dh(t)}{dt},$$

где $h(t) \in L_2(T)$, а система функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(T)$.

Двумерная матрица $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(q(i,t), \frac{dq(j,t)}{dt} \right)_{L_2(T)}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots,$$

называется спектральной характеристикой оператора дифференцирования, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{D}_t] = \mathcal{P}$.

Операторы дифференцирования

Спектральной характеристикой оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент называется спектральная характеристика оператора $\tilde{\mathcal{D}}_t$, т.е. такая двумерная матрица $P = (P_{ij})$, что

$$P_{ij} = \left(q(i,t), \frac{dq(j,t)}{dt} \right)_{L_2(T)} + q(i,t_0)q(j,t_0), \quad i,j = 0,1,2,\ldots,$$

где соответствующий оператор дифференцирования задается соотношением

$$\tilde{\mathcal{D}}_t h(t) = \frac{dh(t)}{dt} + \delta(t-t_0)h(t).$$

Далее будем обозначать через $q(t)$ матрицу-столбец, элементами которой являются значения функций базисной системы в точке t (спектральная характеристика δ-функции):

$$q(t) = \left[\, q(0,t) \;\; q(1,t) \;\; q(2,t) \;\; \ldots \,\right]^{\mathrm{T}}.$$

Операторы дифференцирования

Спектральные характеристики $\mathcal{P}$ и P операторов дифференцирования $\mathcal{D}_t$ и $\tilde{\mathcal{D}}_t$ соответственно связаны соотношением

$$\mathcal{P} = P - q(t_0) \cdot q^{\mathrm{T}}(t_0).$$

1. Дифференцирование функций без учета начальных условий. Спектральная характеристика производной функции $h(t)$ равна произведению спектральной характеристики $\mathcal{P}$ оператора дифференцирования $\tilde{\mathcal{D}}_t$ и спектральной характеристики H функции $h(t)$:

$$\mathbb{S}\left[\frac{dh(t)}{dt}\right] = \mathcal{P} \cdot H.$$

2. Дифференцирование функций при заданных начальных условиях. Спектральная характеристика производной функции $h(t)$ при условии, что $h(t_0) = h_0$, определяется следующим образом:

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{h(t_0)=h_0}\right] = P \cdot H - h_0 \cdot q(t_0).$$

Операторы дифференцирования

Пример. Спектральная характеристика P оператора дифференцирования с учетом начального условия относительно полиномов Лежандра:

$$P = \frac{1}{\tau} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} & \ldots & c_{0m} & \ldots \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{15} & \sqrt{21} & \ldots & c_{1m} & \ldots \\ \sqrt{5} & -\sqrt{15} & 5 & \sqrt{35} & \ldots & c_{2m} & \ldots \\ -\sqrt{7} & \sqrt{21} & -\sqrt{35} & 7 & \ldots & c_{3m} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{m-k,m} = \sqrt{(2m-2k+1)(2m+1)},$$
$$c_{m,m-k} = (-1)^k \sqrt{(2m+1)(2m-2k+1)},$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Операторы дифференцирования

Пример. Найти спектральную характеристику производной $w(t)$ функции $h(t) = t^2$ с учетом нулевых начальных условий относительно полиномов Лежандра, заданных на отрезке $T = [0,4]$.
Решение. Спектральная характеристика H функции $h(t)$, определенная относительно полиномов Лежандра:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{32}{3} & \frac{16\sqrt{3}}{3} & \frac{16\sqrt{5}}{15} & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Далее,

$$W = P \cdot H =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} & \ldots \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{15} & \sqrt{21} & \ldots \\ \sqrt{5} & -\sqrt{15} & 5 & \sqrt{35} & \ldots \\ -\sqrt{7} & \sqrt{21} & -\sqrt{35} & 7 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{32}{3} \\ \frac{16\sqrt{3}}{3} \\ \frac{16\sqrt{5}}{15} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

Операторы дифференцирования

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} \frac{32}{3} + \sqrt{3} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} + \sqrt{5} \cdot \frac{16\sqrt{5}}{15} \\ -\sqrt{3} \cdot \frac{32}{3} + 3 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} + \sqrt{15} \cdot \frac{16\sqrt{5}}{15} \\ \sqrt{5} \cdot \frac{32}{3} - \sqrt{15} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} + 5 \cdot \frac{16\sqrt{5}}{15} \\ -\sqrt{7} \cdot \frac{32}{3} + \sqrt{21} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} - \sqrt{35} \cdot \frac{16\sqrt{5}}{15} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Проверим найденное решение, применяя формулу обращения:

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \cdot \hat{P}(i,t) = 8\hat{P}(0,t) + 8\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{P}(1,t) =$$

$$= 8\sqrt{\frac{1}{4}} + 8\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{2}{4}t - 1\right) = 2t.$$

Операторы интегрирования

Пусть $\mathcal{D}_t^{-1}$ — оператор интегрирования, определенный на пространстве $L_2(T)$:

$$\mathcal{D}_t^{-1} h(t) = \int_{t_0}^{t} h(\theta) d\theta,$$

где $h(t) \in L_2(T)$, а система функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(T)$.

Двумерная матрица $P^{-1} = (P_{ij}^{-1})$, элементы которой определяются формулой

$$P_{ij}^{-1} = \left(q(i,t), \int_{t_0}^{t} q(j,\theta) d\theta \right)_{L_2(T)}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots,$$

называется спектральной характеристикой оператора интегрирования, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{D}_t^{-1}] = P^{-1}$.

Операторы интегрирования

1. Спектральные характеристики P и P^{-1} операторов дифференцирования и интегрирования $\mathcal{D}_t$ и $\mathcal{D}_t^{-1}$ соответственно связаны соотношением

$$P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = E.$$

2. Нахождение первообразной функции.
Спектральная характеристика интеграла функции $h(t)$ определяется следующим образом:

$$\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{t} h(\theta)\,d\theta\right] = P^{-1} \cdot H.$$

Операторы интегрирования

Пример. Спектральная характеристика P^{-1} оператора интегрирования относительно полиномов Лежандра:

$$P^{-1} = \tau \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{35}} & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{35}} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{m-1,m} = -c_{m,m-1} = -\frac{1}{2\sqrt{4m^2-1}}, \quad c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0,$$
$$m = 1, 2, 3, \ldots, \quad k = 0, 2, 3, \ldots, m.$$

Пример. Найти нестационарную спектральную характеристику функции

$$w(t) = \int_0^t \theta^3 d\theta$$

относительно полиномов Лежандра, заданных на отрезке $T = [0, 4]$.
Решение. Спектральная характеристика H функции $h(t)$, определенная относительно полиномов Лежандра:

$$H = \begin{bmatrix} 32 & \dfrac{96\sqrt{3}}{5} & \dfrac{32\sqrt{5}}{5} & \dfrac{32\sqrt{7}}{35} & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Операторы интегрирования

Далее,

$$W = P^{-1} \cdot H =$$

$$= 4 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{35}} & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{35}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{63}} & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{63}} & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 32 \\ \frac{96\sqrt{3}}{5} \\ \frac{32\sqrt{5}}{5} \\ \frac{32\sqrt{7}}{35} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

Операторы интегрирования

$$
= 512 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{20} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{20} \\ \frac{1}{2\sqrt{15}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{20} - \frac{1}{2\sqrt{35}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{140} \\ \frac{1}{2\sqrt{35}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{20} \\ \frac{1}{2\sqrt{63}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{140} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{128}{5} \\ \frac{256\sqrt{3}}{15} \\ \frac{256\sqrt{5}}{35} \\ \frac{64\sqrt{7}}{35} \\ \frac{64\sqrt{9}}{315} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}.
$$

Проверим найденное решение, применяя формулу обращения:

$$
w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \cdot \hat{P}(i,t) = \frac{128}{5}\hat{P}(0,t) + \frac{256\sqrt{3}}{15}\hat{P}(1,t) + \\
+ \frac{256\sqrt{5}}{35}\hat{P}(2,t) + \frac{64\sqrt{7}}{35}\hat{P}(3,t) + \frac{64\sqrt{9}}{315}\hat{P}(4,t) = t^4/4.
$$

Операторы отражения

Пусть $\mathcal{M}_t$ — оператор отражения (инверсии), определенный на пространстве $L_2(T)$:

$$\mathcal{M}_t h(t) = h(t_1 + t_0 - t) \quad (T = [t_0, t_1]), \quad \mathcal{M}_t h(t) = h(-t) \quad (T = \mathbb{R}),$$

где $h(t) \in L_2(T)$, а система функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(T)$.

Двумерная матрица $M = (M_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$M_{ij} = \big(q(i,t), q(j, t_1 + t_0 - t)\big)_{L_2(T)} \quad (T = [t_0, t_1]), \quad i,j = 0,1,2,\ldots,$$
$$\big\{M_{ij} = \big(q(i,t), q(j,-t)\big)_{L_2(T)} \quad (T = \mathbb{R}), \quad i,j = 0,1,2,\ldots\big\},$$

называется спектральной характеристикой оператора отражения, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{M}_t] = M$.

Интегральные операторы

Пусть $\mathcal{K}_t$ — интегральный оператор, или оператор Фредгольма (*E.I. Fredholm*), определенный на пространстве $L_2(T)$:

$$\mathcal{K}_t h(t) = \int_T k(t,\theta) h(\theta) d\theta,$$

где $h(t) \in L_2(T)$, $k(t,\theta)$ — заданная функция (интегральное ядро), система функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(T)$.

Двумерная матрица $K = (K_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$K_{ij} = \left(q(i,t), \int_T k(t,\theta) q(j,\theta) d\theta \right)_{L_2(T)}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots$$

называется спектральной характеристикой интегрального оператора, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{K}_t] = K$.

Операторы сдвига

Пусть $\mathcal{S}_t$ — оператор сдвига, определенный на пространстве $L_2(T)$:

$$\mathcal{S}_t h(t) = h(t-\tau)\chi_T(t),$$

где $h(t) \in L_2(T)$, τ — величина сдвига (запаздывание, опережение), $\chi_T(t)$ — индикатор множества T, система функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(T)$.

Двумерная матрица $S = (S_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$S_{ij} = \big(q(i,t), q(j,t-\tau)\chi_T(t)\big)_{L_2(T)}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots$$

называется спектральной характеристикой оператора сдвига, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{S}_t] = S$.